2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年11月

第二章 导数与微分

掌握要点

一、熟记求导公式和求导法则(基本功)
二、导数的定义（小题出现，常考）
三、分段函数的导数（重点，与其他知识点结合）
四、变限积分求导（几乎每年涉及）
五、高阶导数（难点）

考试要求

1、理解导数和(了解)微分的概念，理解(了解)导数与微分的关系，理解 (了解)导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义（经济意义，含边际和弹性），会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系。

2、掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式，了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

3、了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。

4、会求分段函数的导数。会求隐函数和由参数方程（数一、二）所确定的函数以及反函数的导数。

考试内容概要

一、导数与微分的概念

1、导数

(1)定义：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得改变量$\Delta x(\Delta x\neq 0)$时，相应地函数$f(x)$的改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

如果Δy与Δx之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点x_0处可导，并称这个极限为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$，

或记为 $f'(x_0)$或$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$或$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$，

即 $$y'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其它形式 $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2)单侧导数

左导数：$f'_{-}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to x_0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

右导数：$f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to x_0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_{-}(x_0)$和右导数$f'_{+}(x_0)$都存在且相等

关于导数的说明：

★ $f'(x_0)$是因变量在点x_0处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

★ 如果函数$y=f(x)$在开区间(a,b)内的每点处都可导，就称函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导.

★ 对于任一$x\in(a,b)$，都对应着$f(x)$的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数$f(x)$的导函数.记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}.$$

注：$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

即 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 或 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

★ 如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f'_+(a)$和$f'_-(b)$都存在，则称$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

(3) 可导与连续的关系

函数 $f(x)$在点 x_0处可导,则它在点 x_0处一定连续.反之不成立.

证 设函数 $f(x)$在点 x_0可导, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \qquad \alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x] = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 x_0连续.

注： 左导数存在⇒左连续，右导数存在⇒右连续

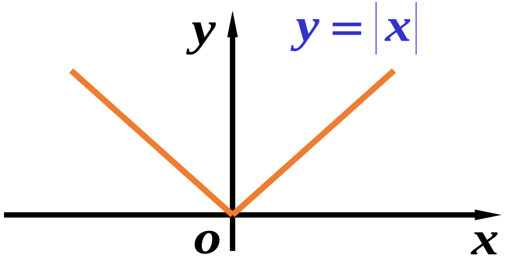
左导数存在+右导数存在⇒连续

例1 讨论函数$f(x)=|x|$在$x=0$处的连续性与可导性

解 因$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x=0$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=0$,

即$\lim\limits_{x\to0} f(x)= f(0)=0$,

所以$f(x)$在$x=0$处连续.



但$\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{h\to0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

即$f'_+(0)\neq f'_-(0)$,因此函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

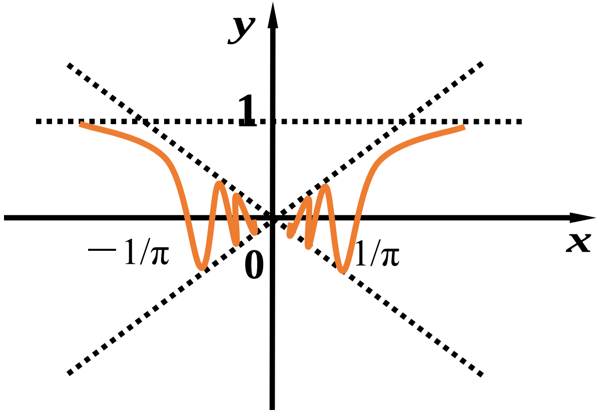
例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在$x=0$处的连续性与可导性

解 $\because \sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数, $\quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\because \ f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$\therefore \ f(x)$在$x=0$处连续.



但在$x=0$处有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

当$\Delta x\to 0$时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在$-1$和$1$之间振荡而极限不存在.

$\therefore \ f(x)$在$x=0$处不可导.

例 3(1994-3)、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{3}, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 为在 x=1 处的

（A）左、右导数都存在.　　（B）左导数存在但右导数不存在.

（C）左导数不存在但右导数存在.　　（D）左、右导数都不存在.

【解 1】 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+x+1)=2$,

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$,

左导数存在但右导数不存在.

答案：B

例 3(1994-3)、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{3}, x\le 1\\ x^2, \quad x>1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 为在 x=1 处的

（A）左、右导数都存在.

（B）左导数存在但右导数不存在.

（C）左导数不存在但右导数存在.

（D）左、右导数都不存在.

【解 2】 $f'_-(1)=\left(\dfrac{2}{3}x^3\right)'\Bigg|_{x=1}=2$，而 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1\ne f(1)$

左导数存在但右导数不存在.

答案：B

注：避免错误 $f'_+(1)=\left(x^2\right)'\Big|_{x=1}=2$，而得到 $f'(1)=2$.

例 4(1990-45)设函数 $f(x)$对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a, b 为非零常数，则

(A) $f(x)$在 $x=1$ 处不可导.　　(B) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$.

(C) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$.　　(D) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.【　】

【详解】由导数定义知

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}$$

$$=a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab.$$

所以应选(D).

2、微分

(1)定义:设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义, x_0及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数),则称函数$y=f(x)$在点 x_0可微,并且称$A\cdot\Delta x$为函数 $y=f(x)$在点 x_0相应于自变量增量Δx的微分,记作

$$dy\Big|_{x=x_0} \text{ 或 } df(x_0),\ \text{即} dy\Big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$$

微分 dy叫做函数增量Δy的线性主部.

(微分的实质)

(2)可微的条件

函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证　必要性　$f(x)$在点x_0可微，

$$\therefore \Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$在点 x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

充分性　函数$f(x)$在点x_0可导，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$，

$\alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$，

从而 $$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot(\Delta x),$$

$$= f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

$f(x)$在 x_0可微，且 $f'(x_0) = A$.

例 5(1988-123)若函数 $y=f(x)$有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小.　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

【分析】 $dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$

答案：B

3、导数与微分的几何意义

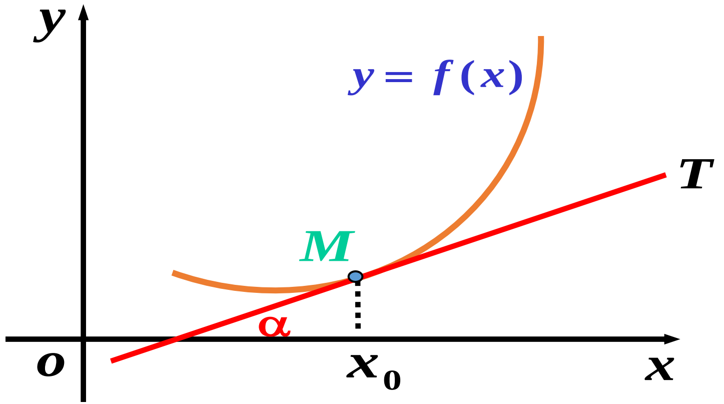
(1)导数的几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$

在点$M(x_0, f(x_0))$处的

切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$

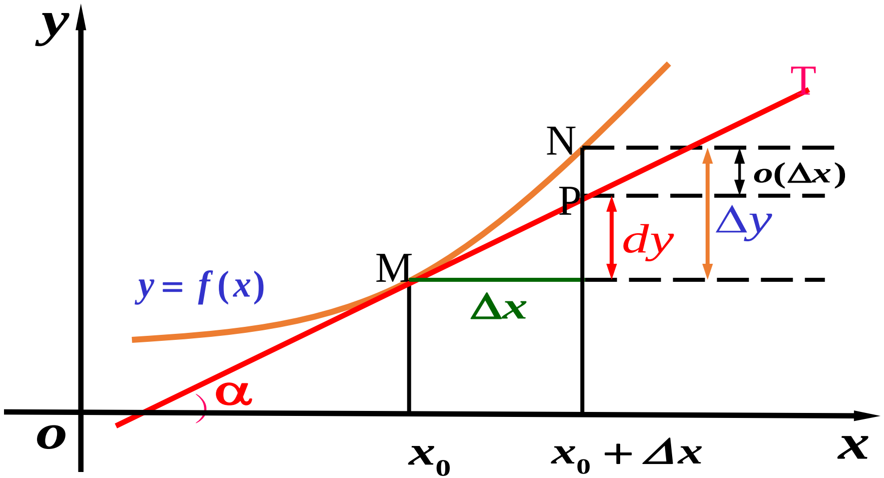
法线方程为: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$

注: 1)函数可导⇒曲线有切线，反之不然;

2)曲线有水平切线时

(2)微分的几何意义

函数$y=f(x)$的微分dy就是过点$M(x,y)$的切线的纵坐标的改变量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，切线段MP可近似代替曲线段MN.

(3)微分形式的不变性

设函数$y=f(u)$有导数$f'(u)$,

(1) 若u是自变量时, $\underline{dy=f'(u)du;}$

(2) 若u是中间变量时, 即另一变量x的可微函数$u=\varphi(x)$, 则 $dy=f'(u)\varphi'(x)dx$

$\because du=\varphi'(x)dx,\qquad \underline{\therefore dy=f'(u)du.}$

结论: 无论u是自变量还是中间变量, 函数$y=f(u)$的微分形式总是 $\boxed{dy=f'(u)du}$

微分形式的不变性

例6 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$，求dy.

解

$$dy=\frac{1}{x+e^{x^2}}d(x+e^{x^2})$$

$$=\frac{1}{x+e^{x^2}}\cdot(dx+de^{x^2})$$

$$=\frac{1}{x+e^{x^2}}\cdot[dx+e^{x^2}d(x^2)]$$

$$=\frac{1}{x+e^{x^2}}\cdot(dx+2xe^{x^2}dx)$$

$$=\frac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$$

例 7（2004-1）曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为__________.

【详解】 本题也可先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，函数 $y=\ln x$ 在此切点的导数为

$$y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}=1,$$ 得 $x_0=1$，

由此可知所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$， 即 $y=x-1$.

4、几个概念之间的关系

可微$\Leftrightarrow$可导$\Rightarrow$连续$\Rightarrow$极限存在（$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$）

例 8（2020-1） 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, 则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$. 【 】

【详解 1】 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot 0=0$. 故选(C).

例 8（2020-1）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, 则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$.　　【　　】

【详解 2】可利用举反例排除错误答案.取 $f(x)=|x|$，排除(A)；

取 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\neq 0, \\ 1, x=0. \end{cases}$，排除(B)；取 $f(x)=x$，排除(D).

二、导数公式和求导法则

1、基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2、求导法则

(1)函数的和、差、积、商的求导法则

1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$

2) $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$

3) $[\dfrac{u(x)}{v(x)}]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$

注：(1) $[u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)]' = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x)$

(2) $[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]' = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$

$+ \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x).$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\dfrac{\varDelta u}{\varDelta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{\varDelta v}{\varDelta x}}{v(x+\varDelta x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

(2)、复合函数的求导法则

如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导, 而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导, 则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导,且其导数为:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即　因变量对自变量求导, 等于因变量对中间变量求导, 乘以中间变量对自变量求导. (链式法则)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

证　由$y=f(u)$在点u_0可导得

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha\quad(\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u,$　于是,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

复合函数的求导公式可以推广到有限次复合的情形.

设 $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x),$
则复合函数$y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}.$

例 9（1995-2） 设 $y=\cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y'=$ __________.

解：

$$y'=[\cos(x^2)]'\sin^2\frac{1}{x}+\cos(x^2)[\sin^2\frac{1}{x}]'$$

$$=-\sin(x^2)(x^2)'\sin^2\frac{1}{x}+\cos(x^2)2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'$$

$$=-2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cos(x^2)\sin\frac{2}{x}$$

例 10、 设函数 $f(x)$ 可导，试证

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

(3) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $f'(x)$ 也为周期函数.

特别： 若 $f(x)$ 为偶函数且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=0$

设 $f(x)$ 以 T 为周期且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0+T)=f'(x_0)$

注： $f(x)$ 为偶函数，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-t)-f(0)}{-t}=-\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-f'(0)$$

例 11(2017-1)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$ ________.

分析：实际上 $f^{(3)}(x)$ 为奇函数，所以 $f^{(3)}(0)=0$

注： $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots,$

$$f^{(3)}(0)=a_3 3!=0.$$

(3)、隐函数的导数

由方程$F(x,y)=0$所确定的函数 $y=y(x)$称为隐函数.

$y=f(x)$形式称为显函数.

$F(x,y)=0 \longrightarrow y=f(x)$ 隐函数的显化

问题：隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导解出y'.

例 12(1993-3) 函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

解： 方程两边对x求导

$$\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)\cos(x^2+y^2)+e^x-y^2-2xy\frac{dy}{dx}=0$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$$

例13、求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数y的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对x求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0,$$

由原方程知 $x = 0, y = 0,$

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1.$

(4)、反函数的导数

如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 D_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 D_x 内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

即 **反函数的导数等于直接函数导数的倒数.**

证 任取$x \in D_x$，给x以增量Δx $(\Delta x \neq 0, x+\Delta x \in D_x)$

由$y = f(x)$的单调性可知$\Delta y \neq 0$,

于是有 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}},$$

因 $f(x)$连续，所以$\Delta y \to 0(\Delta x \to 0)$,

又知$\varphi'(y) \neq 0$

因此 $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 $$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

例14 求函数 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 因$x = \sin y$在 $D_y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$内单调、可导,

且 $(\sin y)' = \cos y > 0$, 所以在$D_x \in (-1,1)$内有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(5)、参数方程确定函数的导数(数学一、二要求)

由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定 y 是 x 的函数，其中

$x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 都有二阶导数且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \frac{d^2y}{d^2x}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

例 15(2020-1)设$\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}}{\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{1}{t}}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

(6)、对数求导法

适用范围:

多个函数的乘、除和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

方法:

先在方程两边(或函数)取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例 16(2005-2) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\big|_{x=\pi}=$ ________________ .

【详解】 两边取对数，$\ln y = x\ln(1+\sin x)$，两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \ln(1+\sin x) + \frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

于是 $y'=(1+\sin x)^x\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\dfrac{\cos x}{1+\sin x}]$，故 $dy\big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$

【另解】 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，于是

$$y'=e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

从而 $dy\big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$

例17 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$, 求$y'$.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}(x-1)'+\frac{1}{x-2}(x-2)'-\frac{1}{x-3}(x-3)'-\frac{1}{x-4}(x-4)']$$

$$y'=\frac{y}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cdot(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$$

(7)、微分的求法

$$dy = f'(x)dx$$

求法：计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1)基本初等函数的微分公式

$d(c) = 0$　　　　$d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$

$d(\sin x) = \cos x dx$　　　　$d(\cos x) = -\sin x dx$

$d(\tan x) = \sec^2 x dx$　　　　$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$　　　　$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx \qquad d(\operatorname{arc}\cot x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2) 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

三、高阶导数

1、高阶导数的概念

如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$在点x处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$在点x处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数， $f'''(x),\ y''',\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数， $f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \dfrac{d^4y}{dx^4}$.

一般地，函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为

函数$f(x)$的n阶导数，记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n}\text{或}\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地，$f(x)$称为零阶导数；$f'(x)$称为一阶导数.

$f(x)$的各阶导数在$x=x_0$处的导函数值分别记为

$$f'(x_0), f''(x_0),\cdots, f^{(n)}(x_0),\ \text{或}y'|_{x=x_0}, y'|_{x=x_0},\cdots, y^{(n)}|_{x=x_0}.$$

注：函数$f(x)$在x处n阶可导，则在x的某邻域内$f(x)$具有一切低于n阶的导数

2.常用的高阶导数公式

设函数 $u(x),v(x)$ 在 x 处有 n 阶导数，则

$$(u\pm v)^{(n)}=(u)^{(n)}\pm(v)^{(n)},\quad (uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(u)^{(k)}(v)^{(n-k)}$$

(1) $(x^n)^{(n)}=n!$

(2) $(e^{ax+b})^{(n)}=a^n e^{ax+b},(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$

(3) $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

(4) $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

(5) $[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

例18 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$y'' = -\sin x = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

$y''' = -\cos x = \sin(3 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

$y^{(4)} = \sin x = \sin(4 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

$y^{(5)} = \cos x = \sin(5 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$

$\cdots\cdots$

$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

$(\sin 3x)^{(n)} = 3^n \sin(3x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

即 $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

同理可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

例 19、设 $y = x^2 \cos x$，求 $y^{(n)}$

解、用莱布尼兹公式

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (\cos x)^{(n-k)}$$

$$= C_n^0 x^2 (\cos x)^{(n)} + C_n^1 2x (\cos x)^{(n-1)} + C_n^2 2 (\cos x)^{(n-2)}$$

$$= x^2 \cos(x + \frac{n}{2}\pi) + 2nx \cos(x + \frac{n-1}{2}\pi) + n(n-1)\cos(x + \frac{n-2}{2}\pi)$$

常考题型与典型例题

1、导数的定义.

2、各种形式的求导.

3、高阶导数.

4、导数的应用.

一、导数的定义-命题形式

1、分段函数在分界点处的导数.

2、已知 $f'(x_0)$ 存在，求极限.

3、已知极限求 $f'(x_0)$.

4、抽象函数 $f(x)$ 可导性未知，求 $f'(x_0)$ 或 $f'(x)$.

例 20、设 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2021}-1}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2021}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^{2020}+x^{2019}+\cdots+x+1)}$

$$=\frac{f'(1)}{2021}=\frac{1}{2021}$$

例 21(1994-3)已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{-x}}$

$$=-\frac{1}{f'(x_0)}=1$$

注：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0)-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}+\lim_{x\to 0}\frac{[f(x_0-x)-f(x_0)]}{-x}=-f'(x_0)=1$$

例 22(2011-23) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.　　(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

【详解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3},$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

答案：B

例 23(2006-34)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

（A） $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$∃　　（B） $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$∃

（C） $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$∃　　（D） $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$∃

分析：1、 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0\Rightarrow f(0)=0$

2、 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1\Rightarrow f'_+(0)=1$

答案：C

例 24(2013-1) 设函数 $y=f(x)$由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(\frac{1}{n})-1]=$ ___.

【详解】在方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$，等式两端对 x 求导得：

$$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy'),$$

将 $x=0, y=1$ 代入上式，得 $y'(0)=1$,

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{1}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=1.$$

例 25(2018-123)下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

（A） $f(x)=|x|\sin|x|$ （B） $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

（C） $f(x)=\cos|x|$ （D） $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

分析：A、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|^2}{x}=0$

B、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|^{\frac{3}{2}}}{x}=0$

C、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x|^2}{x}=0$

D、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

答案：D

例 26(1989-3)设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

（A）$\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$存在 （B）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]$存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在 （D）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

分析：D、$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a)$

C、$f(x)=\begin{cases}1, x=a\\0, x\neq a\end{cases}$，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=0$

A、$\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'_{+}(a)$

B、$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]}{\frac{1}{n}}$ 答案：D

二、复合函数、隐函数、参数方程求导

例 27(1993-3)设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=2x\cos[f(x^2)]f'(x^2)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cos[f(x^2)]f'(x^2)-2x\sin[f(x^2)][f'(x^2)]^2\cdot 2x+2x\cos[f(x^2)]f''(x^2)\cdot 2x$$

$$=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$$

例 28(2012-2) 设 $y=y(x)$是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{d^2y}{d^2x}\Big|_{x=0}=$ ________.

解： 将 $x=0$ 代入方程 $x^2-y+1=e^y$ 得 $y=0$.

在方程 $x^2-y+1=e^y$ 两边同时对 x 求导得 $2x-y'=e^y\cdot y'$,

代入 $x=0$, $y=0$ 得 $y'(0)=0$.

再在方程 $2x-y'=e^y\cdot y'$ 两边对 x 求导得 $2-y''=e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''$,

代入 $x=0, y=0$, $y'(0)=0$ 得 $y''(0)=1$.

例 29(2013-1) 设$\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

解： 可计算 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t, \dfrac{dy}{dt}=t\cos t$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=t$.

由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx}$ 有

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{dt}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{1}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

三、 高阶导数

方法： 1、数学归纳法

2、重要函数的高阶导数公式

3、莱布尼兹公式

4、幂级数展开（泰勒公式）

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \Rightarrow f^{(n)}(x_0)=a_n n!$$

例 30(2007-23)设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$________.

分析：$y^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$，

故 $y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

例 31(2015-2) 函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$____.

解、 用莱布尼兹公式

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(2^x)^{(n-k)}$$

$$=C_n^0x^2(2^x)^{(n)}+C_n^1 2x(2^x)^{(n-1)}+C_n^2 2(2^x)^{(n-2)}$$

$$f^{(n)}(0)=C_n^2 2(2^x)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=n(n-1)2^x(\ln 2)^{n-2}\Big|_{x=0}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

注： 还可考虑用泰勒展开式

四、导数的应用

1、导数的几何意义

例 32(2011-3)设曲线 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为____________.

【详解】 方程两边对 x 求导得

$$\sec^2(x+y+\frac{\pi}{4})(1+y')=e^y y'$$

令 $x=y=0$ 得 $y'(0)=-2$,

则曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程为: $y=-2x$.

例 33(2013-2)曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 ________ .

【详解】 将 $t=1$ 代入 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln\sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 得 $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = \dfrac{1}{2}\ln 2$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}\right|_{t=1} = t\big|_{t=1} = 1,$$

所求法线方程为 $y - \dfrac{1}{2}\ln 2 = -(x - \dfrac{\pi}{4})$, 即 $x + y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$.

例 34(1997-1)对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 ________ .

【详解】 对数螺线的参数方程可写为 $\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta \\ y=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时， $x=0$， $y=e^{\frac{\pi}{2}}$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1\ ,$$

所求切线的直角坐标方程为 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.

例 35.设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2),$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程

分析： 1、由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0$，得

$$f(1)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-\dfrac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\dfrac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1$

3. $f(-1)=f(1)=0,f'(-1)=-f'(1)=1$,切线方程为 $y=x+1$

2、相关变化率

设 $x = x(t), y = y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在某种关系，因此变化率 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 $\dfrac{dy}{dt}$ 也存在一定关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

例 36(2016-2)设已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与 P 间的距离为 l．若点 P 横坐标时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是________.

【详解】 设动点 $P(x,x^3)$，则 $l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，

且 $\frac{dx}{dt}=v_0$，于是

$$\left.\frac{dl}{dt}\right|_{(x,y)=(1,1)}=\left.\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}=2\sqrt{2}v_0.$$