2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

1° 几何 — 面积、旋转体积 — 掌握

2° 物理（数1，2，—数学2已删）

3° 经济（数3 — 步）

第六章 定积分的应用

定积分应用的基本原理——微元法 元素法

在用定积分求面积、体积、平均值、表面积、弧长、功、引力、压力等问题时,常常要利用微元法思想,其基本步骤如下:

（1）所求量 U 是与区间 $[a, b]$ 以及定义在其上的函数 $f(x)$ 有关的量;

（2）U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性,即当把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间 Δx 之和时,U 相应地被分成许多部分量 ΔU，且 U 等于这些部分量之和;

（3）将 $f(x)$ 在小区间 $[x, x+\Delta x]$ 上近似为常量,则有 $\Delta U \approx f(x)\Delta x$;

（4）若 $\Delta U \approx f(x)\Delta x + o(x)\ (\Delta x \to 0)$，则把 $f(x)\Delta x$ 称为 U 的微元，记作 $\mathrm{d}U$，即 $\mathrm{d}U = f(x)\Delta x$，于是，所求量

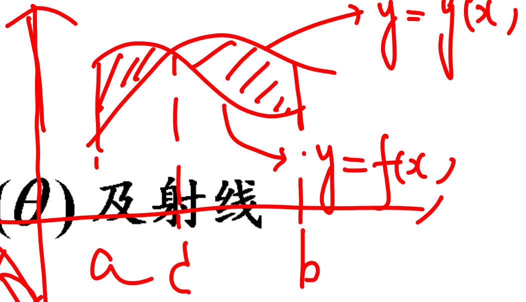
$$U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

1、定积分的几何应用

(1) 平面图形的面积

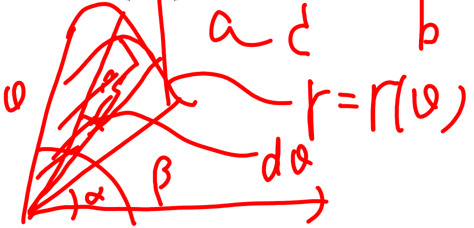
（直角坐标）设平面图形 S 由曲线 $y=f(x), y=g(x)$ 及直线 $x=a, x=b$ 所围成,则平面图形 S 的面积

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



（极坐标）设平面图形 S 的边界为曲线 $r=r(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta(\alpha<\beta)$，则平面图形 S 的面积

$dS=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$



$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$$

(参数方程)由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ 所围平面图形的面积为

$\int_\alpha^\beta$

$$S=\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|dt \checkmark$$

(2) 旋转体的体积

$dV_x = \pi f^2(x)dx \qquad dV_y = 2\pi x f(x)dx$

曲边梯形 $a \le x \le b$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积 $V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$，绕 y 轴旋转一周所生成的旋转体的体积 $V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx\,(f(x) > 0)$

$y = f(x)$

(3) 平行截面面积已知的立体体积(数 1、2)

设垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得的截面面积是 x 的连续函数 $S(x)\ (a \le x \le b)$，则 Ω 的体积为 $V = \int_a^b S(x)dx.$

$y = f(x)$

$y = g(x)$

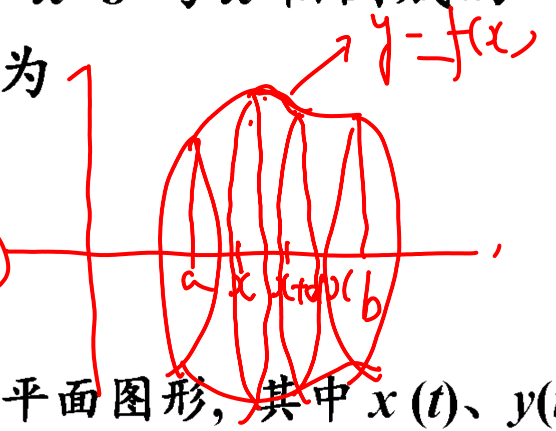
$a \quad x \quad x+dx \quad b$

(4) 旋转体的侧面积(数 1、2)

由连续曲线 $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$)，直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体侧面积为

2πf(x)　　ds

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$



由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leq\theta\leq\beta$ 与 x 轴围成的平面图形，其中 $x(t)$、$y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'(t)$、$\psi'(t)$ 不同时为零，绕 x 轴旋转一周而成的旋转体侧面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

(4)平面曲线的弧长(数 1、2)

(直角坐标)设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)(a\le x\le b)$给出，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，则曲线弧长为

$$S=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$y=f(x)$　dy　dx　x　$x+dx$

(参数方程) 设曲线弧由参数方程 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le\theta\le\beta$ 给出其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$\varphi'(t)$、$\psi'(t)$不同时为零，则曲线弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

(极坐标方程)设曲线弧由极坐标方程 $r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$ 给出，其中 $r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，则曲线弧长为

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

2、定积分的经济应用(数学3)

3、定积分的物理应用(数学1、2)

(1) 质心 一细棒位于 x 轴的区间 $[a,b]$ 上，若其线密度 $\rho(x)$，

形心

则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x\cancel{\rho(x)}dx}{\int_a^b \cancel{\rho(x)}dx}$

a　b

(2)变力做功

1) 质点在平行于 x 轴的力 $F(x)$作用下，沿 x 轴从 a 移动到 b，

则力 $F(x)$所做的功是 $$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

2) 设一容器，液体表面与 Ox 轴相截于 $x=a$，底面与 Ox 轴相截于 $x=b$，垂直于 Ox 轴的平面截容器所得的截面面积为 x 的连续函数 $S(x)$，则将容器中的液体全部抽出所做的功为

$$W=\int_a^b \rho g x S(x)\mathrm{d}x,$$

这里原点建立在容器上底面,正向为垂直向下的 x 轴,ρ 为液体密度， g 为重力加速度.

(3) 液体静压力在液面下深度 h 处,由液体重量所产生的压强 $P=\rho gh$.

1) 设有一面积为 A 的平面薄板水平地放置在深度为 h 处的均匀静止液体中,则平面薄板一侧所受的压力为 $F=$压强$\times$面积$=\rho ghA$.

2) 设有一高为 h，宽为 $f(x)$ ($f(x)\geq 0$)的平面薄板垂直地放置在均匀静止液体中，薄板的上方与液面的距离为 a，则此薄板所受的侧压力为

$$F=\int_a^{a+h} \rho g x f(x)\mathrm{d}x,$$

这里原点建立在液面上,正向为垂直向下的 x 轴,ρ 为液体密度， g 为重力加速度.

(4)引力质量分别为 m_1, m_2，相距为 r 的两质点间的引力大小为

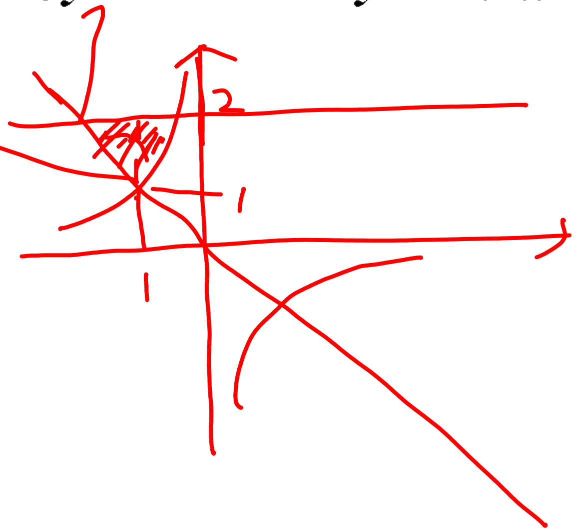
$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2},\qquad \text{其中 } G \text{ 为引力系数.}$$

常考题型与典型例题

$xy=-1$

例 1(2014-3) 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为____. $\frac{3}{2}-\ln 2$.

$x=-\frac{1}{y}$

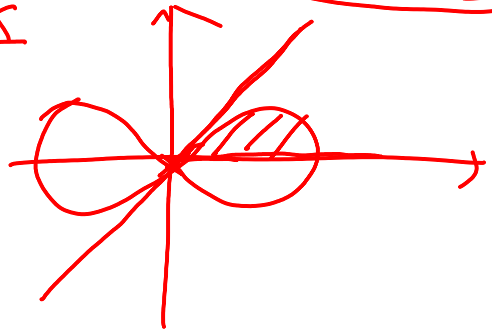


$$S=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)dy=\left(-\ln y+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2$$

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

例 2(2013-2) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是____________. $\frac{\pi}{12}$

对称性



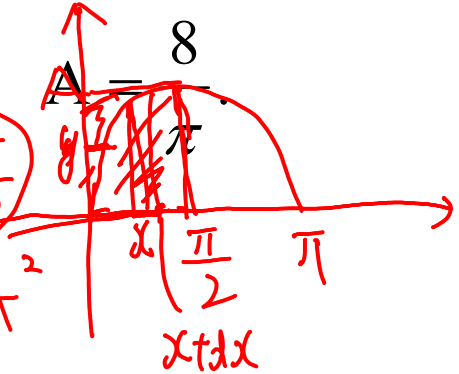
$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{12}$$

例 3(2015-23) 设 A>0，D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1，V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

$A=\dfrac{8}{\pi}$.



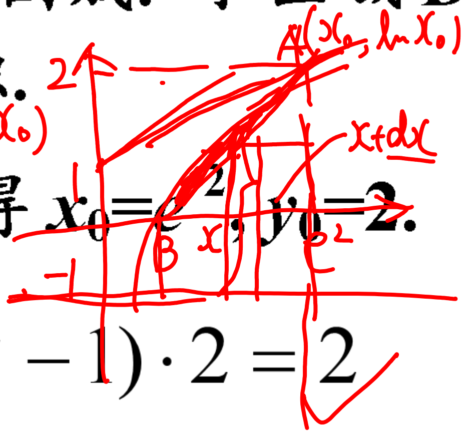
解: $V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}A^2\sin^2x\,dx=\pi A^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$V_2=\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot A-\int_0^A\pi\left(\arcsin\frac{y}{A}\right)^2dy$ $=\frac{\pi^2}{4}A^2$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xA\sin x\,dx=2\pi A$

$\Rightarrow A=\frac{8}{\pi}$

例 4(2012-2) 过点(0, 1)作曲线 L：$y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



切线 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$

【解】(1) 设切点 A 的坐标为(x_0, y_0)，可求得 $x_0=e^2$，$y_0=2$.

$\int_1^{e^2}\pi(\ln x+1)^2dx-\int_1^{e^2}\pi[\quad+1]^2dy$ $x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx$

平面图形 D 的面积为 $A=\int_1^{e^2}\ln x\,dx-\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot 2=2$

分部积分两次 $=x\ln^2x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x\,dx-\frac{4\pi(e^2-1)}{3}=\frac{2\pi(e^2-1)}{3}.$$

例 5(2011-12) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\,dt\ (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 s

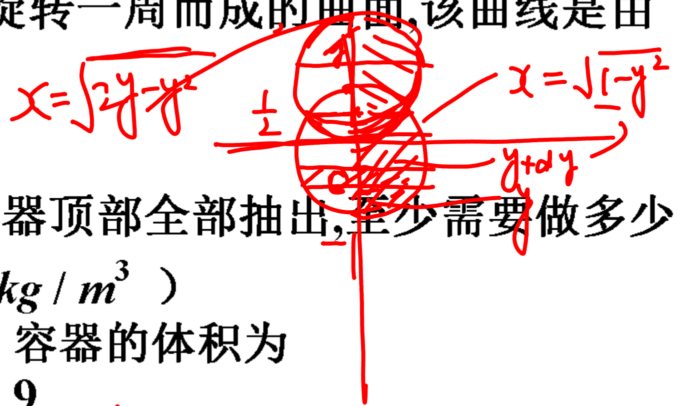
$=$ ________. $\ln(\sqrt{2}+1)$

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

例 6 (2011-2) 一个容器内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线是由 $x^2+y^2=2y\ \left(y\ge\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\ \left(y\le\frac{1}{2}\right)$ 连接而成的。



(1) 求容器的体积; (2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出,至少需要做多少功?

(长度单位:m,重力加速度为 gm/s^2,水的密度为 $10^3\ kg/m^3$)

【详解】 (1) 旋转体分为体积相等的两部分,于是,容器的体积为

$$V=2\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)\mathrm{d}y=2\pi\left(y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{4}\pi$$

或者
$$V=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi(2y-y^2)dy=2\pi\left(y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9}{4}\pi.$$

(2) 当 $-1\le y\le\frac{1}{2}$ 时,功的微元 $\mathrm{d}W=10^3g\pi(1-y^2)(2-y)\mathrm{d}y$;

当 $\frac{1}{2}\le y\le 2$ 时,功的微元 $\mathrm{d}W=10^3g\pi[1-(y-1)^2](2-y)\mathrm{d}y$.

故所求功为 $W=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}1000g\pi(1-y^2)(2-y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}1000g\pi(2y-y^2)(2-y)\mathrm{d}y$

$$=1000g\pi\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y-2y^2+y^3)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(4y-4y^2+y^3)dy\right]$$

$$=1000g\pi\left[\left(2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left(2y^2-\frac{4}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\right]=3375g\pi.$$