2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

第十二章 多元积分学及其应用

2009-2021 年三重、线、面积分分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
三重	4	4			10		4				10		
一线	4									4			
二线		4	4	10	4	4	10	10	4		4	10	6
一面		10		4					10				
二面	10					10		10		10	4	10	5
合计	18	18	4	14	14	14	14	20	14	14	18	20	11

两个问题

1°. 积分区域 确定 定义.

2° 被积函数 确定

1° 划分

2° 近似

3° 求和

4° 取极限

第一节 三重积分

考试要求

1、理解三重积分的概念，了解三重积分的性质

2、会计算三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）.

先二后一

先一后二

考试内容概要

一、定义.

设函数$f(x,y,z)$在有界区域Ω上有界，若对 Ω 作任意分割 $\Delta v_k (k=1,2,\cdots,n)$，任意取点$(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$，下列“乘积和式” 的极限

$= \iiint f\,dxdydz$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \xlongequal{\text{记作}} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的三重积分.

$\mathrm{d}v$称为体积元素，在直角坐标系下常写作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

二、性质：

三重积分的性质与二重积分相似.

例如 **中值定理.**

设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上连续， V 为Ω 的体积，则存在$(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得

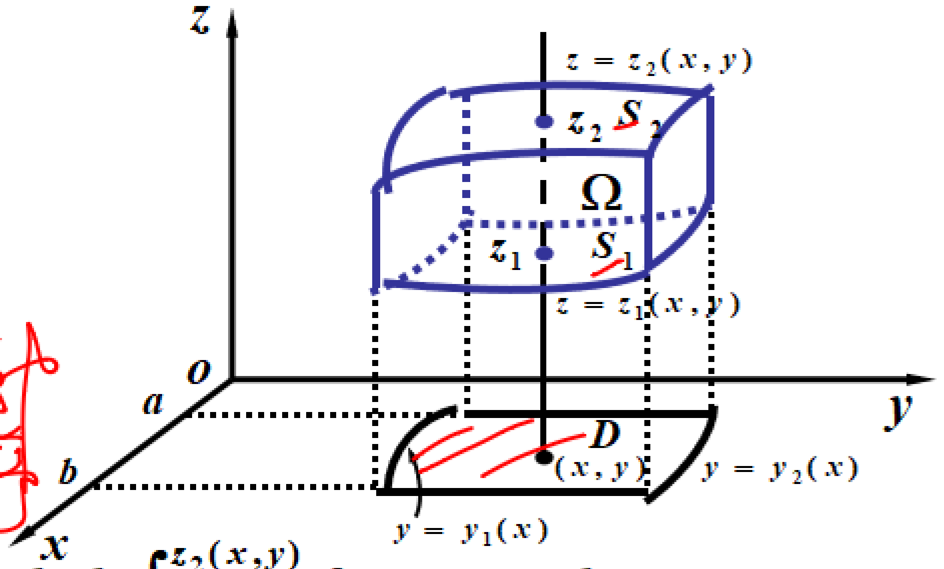
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

三、计算

1、利用直角坐标

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

3!=6种
积分次序



若 $\Omega: z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D$

是一函数

$$\iint_D \left(\boxed{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}\right)dxdy = \iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

没积分

又若 $D: y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b$

这是再积分函式

$$\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

若 $\Omega:(x,y,z)\in D_z,\ z\in[c_1,c_2]$ 先二后一

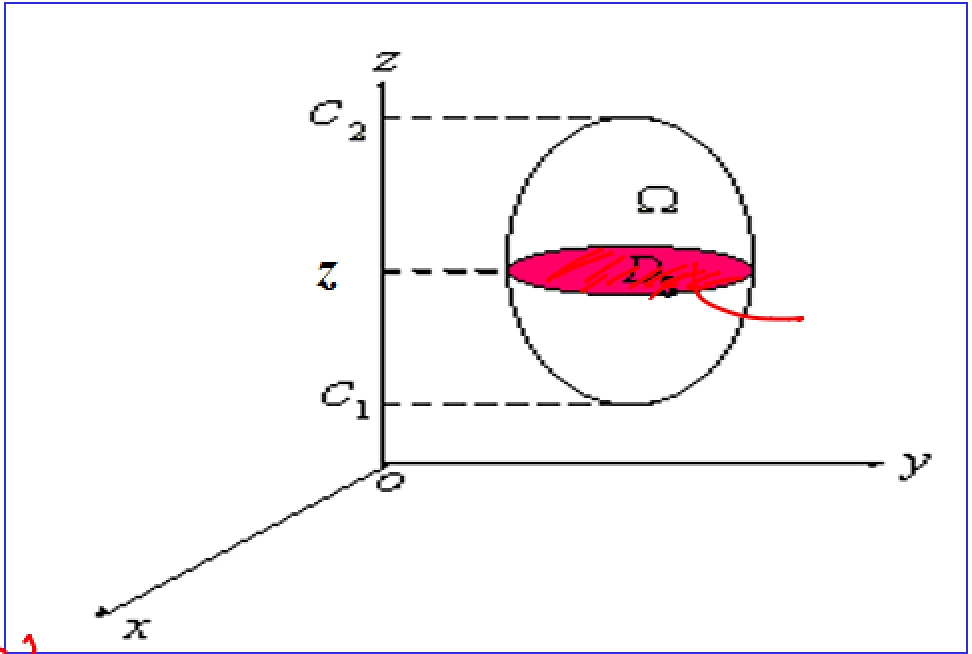
$$=$$

$$\int_{c_1}^{c_2}\Big(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\underline{dx}\,\underline{dy}\Big)dz$$

$$=\int_{c_1}^{c_2}dz\iint\limits_{D_z} \boxed{f(x,y,z)}\,\underline{dxdy}$$

仅与z有关

先二后一



2、利用柱面坐标计算

点 M 的柱（面）坐标 (ρ,θ,z).

三族柱坐标面： $(x.y.z)$

ρ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆柱面；

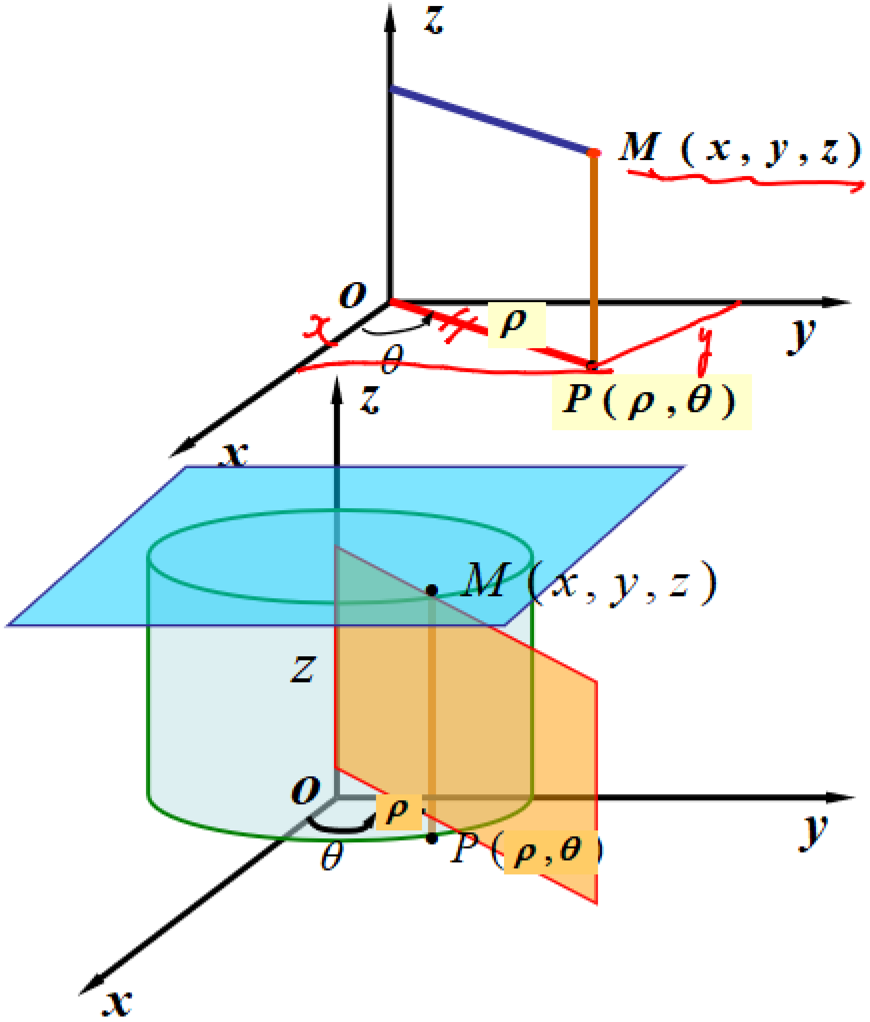
θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面；

z 为常数 $\Longrightarrow$ 平　面.

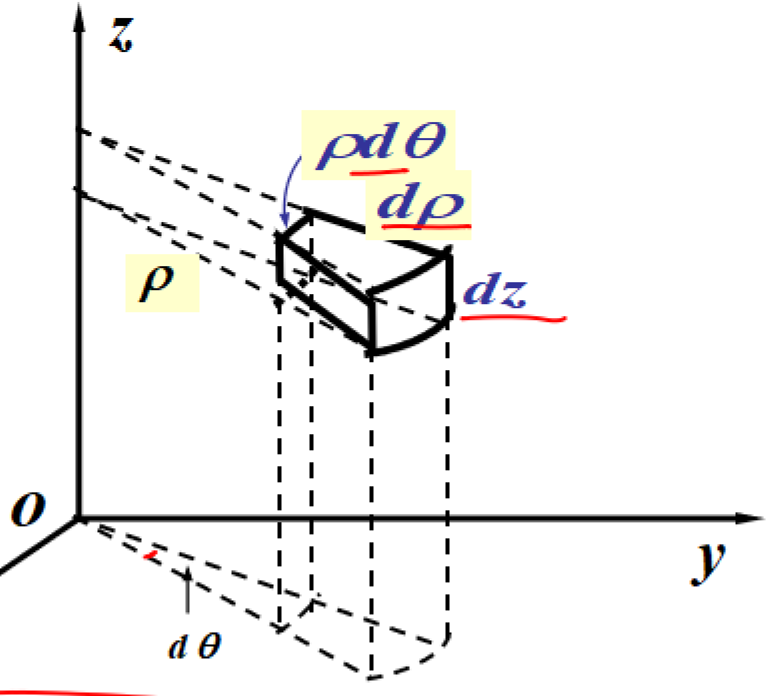
柱坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$$

$f(x^2+y^2)$



柱坐标系中的体积元素：



$$dv = \rho d\rho d\theta dz,$$

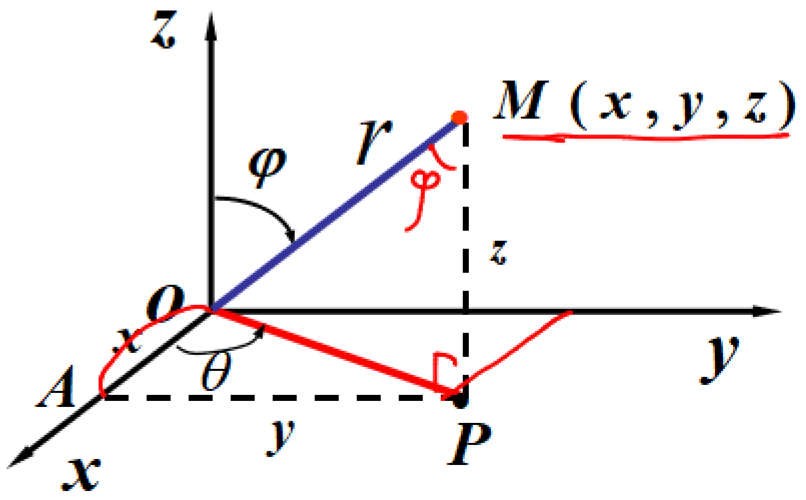
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

先z，再ρ，后θ

$$= \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \cdot \boxed{\rho d\rho d\theta dz}.$$

3、利用球面坐标计算

点 M 的球（面）坐标 (r,φ,θ). (ρ,φ,θ)



三族球坐标面：

r 为常数 $\Longrightarrow$ 球　　面；

φ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆锥面；

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面.

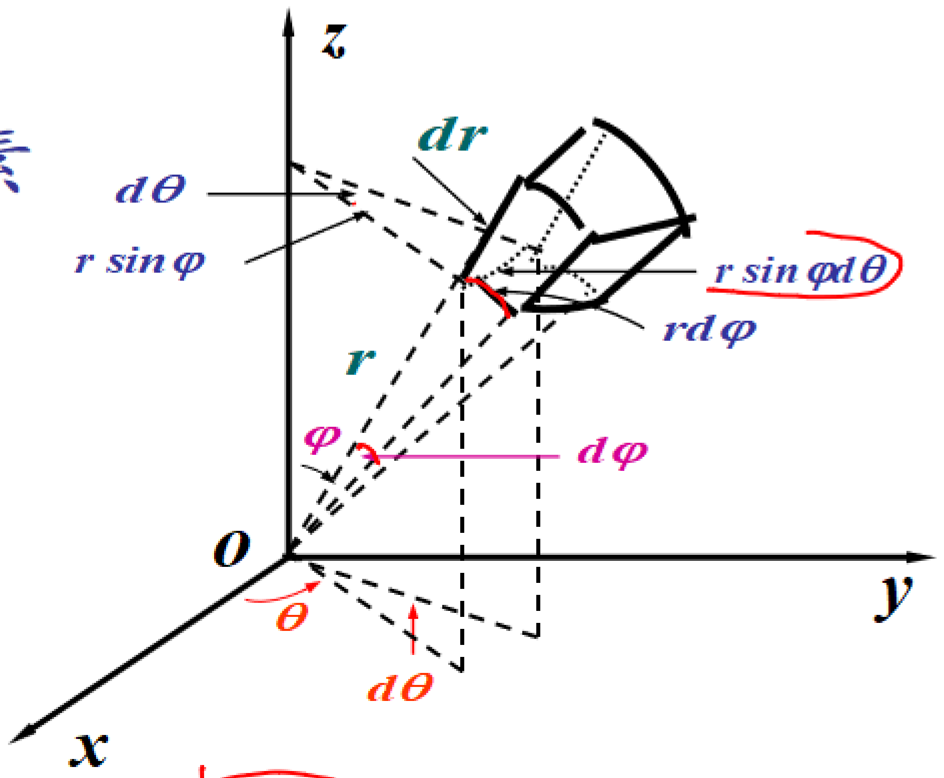
球坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

球坐标系中的体积元素

$$dV = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta,$$

$f(x^2+y^2+z^2) = f(r^2)$



$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$$

先 r 再 φ 后 θ

$$= \iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

四、三重积分的对称性

1、Ω关于 xOy 面对称，则

f关于z是奇函数

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\text{时},\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dV, & \text{当 } f(x,y,-z)=f(x,y,z)\text{时}.\end{cases}$$

其中Ω_1为Ω在 xOy 面上方的部分.

类似地，可得到 Ω关于 yOz 平面、zOx 平面对称的情形.

2、轮换对称性

（1）若 x, y 互换后区域 Ω不变，则

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}[f(x,y,z)+f(y,x,z)]dV$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dV.$$

（2）若 $x\to y, y\to z, z\to x$ 区域 Ω不变，则

$$=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(\qquad)dV$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(y,z,x)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(z,x,y)dV.$$

常考题型与典型例题

1种坐标系-直角坐标下 $dV=dxdydz$, 柱坐标下 $dV=rdrd\theta dz$, 球坐标下 $dV=r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta$.

2 基本方法——化为累次积分(化为三次积分、二次积分(一次定积分和一次二重积分-先二后一).

积分顺序与定限顺序相反———先积分者后定限.

3 关键——选择适宜坐标系和累次积分顺序.

1)积分域的形状(分块少，表达简便)

边界主要为直角坐标面(柱坐标面、球坐标面)———直角坐标(柱坐标、球坐标);

2)被积函数的形式

含 x^2+y^2——柱坐标，含 $x^2+y^2+z^2$——球坐标。

4 利用对称性、轮换对等性等等化简计算。

例 1(1988) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$；及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$，则

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\,dV$. (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\,dV$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\,dV$. (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\,dV$.

关于x,y均为偶函数

分析 Ω_1 关于yoz, xoz对称

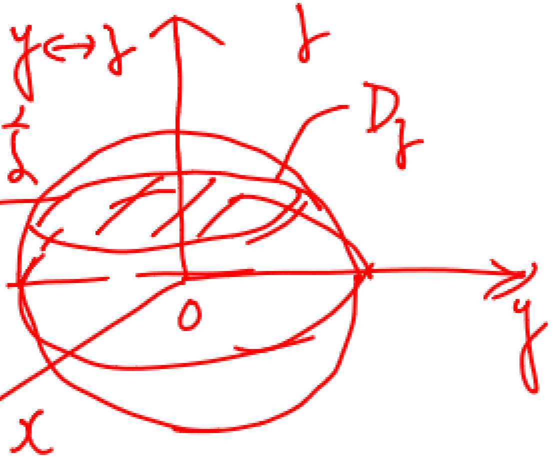
答案：C

例 2(2009) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则

$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz =$ ________. $\frac{4}{15}\pi$

$x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$

Ω 的 z



1° $z=\sqrt{0}$ — $I=\int_{-1}^{1} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy$

$=\int_{-1}^{1} z^2 \cdot \pi(z^2-1)\, dz$

2° $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV$

$=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1} r^2\cdot r^2 \sin\varphi\, dr$

例 3(2015) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dxdydz=$ __$\frac{1}{4}$__.

分析：$\iiint\limits_{\Omega} x\,dV=\iiint\limits_{\Omega} y\,dV=\iiint\limits_{\Omega} z\,dz$

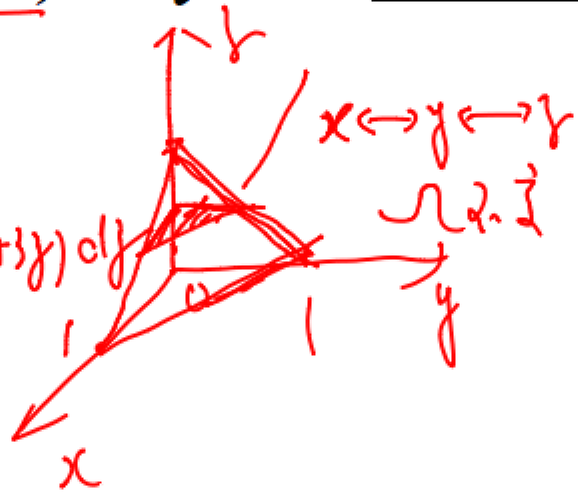
轮换对称性 Ω

$I=6\iiint\limits_{\Omega} z\,dV$

$=6\int_0^1 z\,dz\boxed{\iint\limits_{D_z} dxdy}$

$=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz=\frac{1}{4}$

$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+2y+3z)\,dz$



例 4(1989) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域. $\frac{\pi}{8}$

分析

$\iiint x\,dV=0$

$\iiint z\,dV$

法一 球面坐标 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr$

法二 先二后一 $=$

法三 先一后二 $=\iint\limits_{D}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\,dz$

法四 柱面坐标 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}z\cdot r\,dz$

第二节 曲线积分

考试要求

1、理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.

2、掌握计算两类曲线积分的方法.

3、掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数.

考点

1、第一类曲线积分的计算（小题）

2、第二类曲线积分的计算

（1）参数法(直接法)

（2）格林公式

（3）积分与路径无关

考试内容概要

一. 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

1、概念 $f(P)$在光滑曲线段L上对弧长的曲线积分，即 第一类 曲线积分

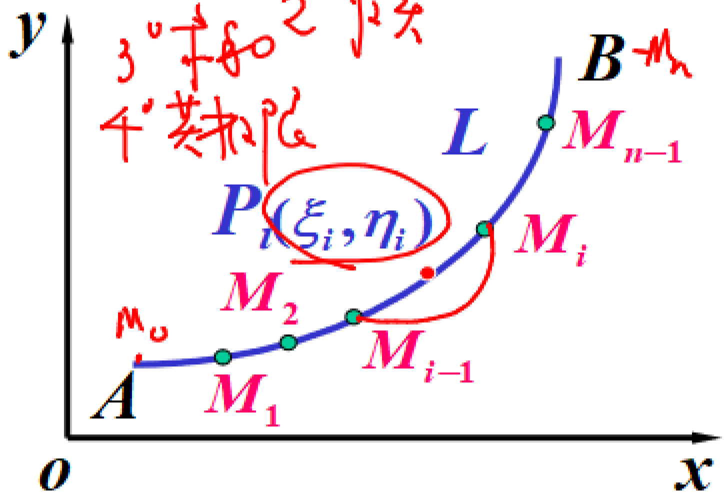
$f(x,y)$

1°划分 2°取点 3°作和 4°求极限

被积函数　被积表达式　积分和

$$\int_L f(P)\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i\,.$$

积分弧段　弧长元素



在分段光滑的曲线段上的积分＝各光滑曲线段上的积分之和。

存在条件： 必要条件、充分条件——同重积分、定积分

2、性质 ——同重积分（定积分）

(1)、线性性；

(2)、关于积分弧的可加性；

(3)、$\int_L ds = |L|$；

(4)、比较定理； $\Longrightarrow$ $ml \le \int_L f(x,y)ds \le Ml$

(5)、估值不等式； $m \le f(x,y) \le M$

(6)、中值定理。 $\int_L f(x,y)ds = f(\xi,\eta)l$

3、计算 学数传

基本方法(直接法)——找到 L的单参数方程，将曲线积分化为对该参数的定积分。

设L 为 xOy 面上的平面光滑曲线段

(1)、若 $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$，$x(t)$、$y(t) \in C^1_{[\alpha,\beta]}$，

则 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

$$\Rightarrow \int_L f(x,y)ds$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

(2)、若 $L: \begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases} \quad (a \le x \le b)$， $y(x) \in C^1_{[a,b]}$，

则 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$

$L: x = x(y) \quad c \le y \le d$

$$\Rightarrow \int_L f(x, y)\,ds$$

$$= \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

$\int_L f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy$

(3)、若 $L: \rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$， $\rho(\theta) \in C^1_{[\alpha,\beta]}$，

$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$

则 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta$

$$\Rightarrow \int_L f(x, y)\,ds$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta.$$

4、设L为空间光滑曲线段

(1)、若L: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta), \\ z = z(t), \end{cases}$ $x(t)$、$y(t)$、$z(t) \in C^1_{[\alpha,\beta]}$,

$C: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

则 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

$= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$

$\Rightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \\ x = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_L f(x,y,z)ds$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

(2)、若 $L:\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$ $(a \le x \le b)$，$y(x)$、$z(x) \in C^1_{[a,b]}$，

则 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

$= \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}dx$

$$\Rightarrow \int_L f(x, y, z)ds$$

$$= \int_a^b f(x, y(x), z(x))\sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}dx.$$

注意：对弧长的曲线积分化为定积分后，恒有：

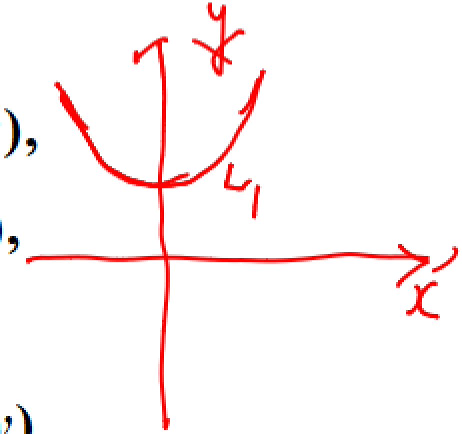
上限 > 下限。

5、第一类曲线积分的对称性（同二重积分类似）

1．若 L 关于 y 轴对称，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{若} f(-x,y)=-f(x,y),\\ 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s & \text{若} f(-x,y)=f(x,y),\end{cases}$$

= 拆分 = $\int_1 + \int_2$



2．若 L 关于 x 轴对称，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{若} f(x,-y)=-f(x,y),\\ 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s & \text{若} f(x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

L 关于 y=x 对称

3．若 L 关于 x，y 具有轮换对称性，即 x，y 互换后，L 不变，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds=\frac{1}{2}\int_L[f(x,y)+f(y,x)]\,ds.$$

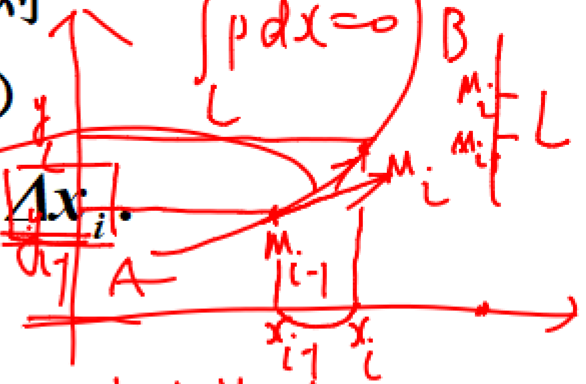
二、 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

$L \perp x$轴

$\int_L p\,dx = 0$

1、定义：$P(x,y)$沿光滑有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分(或称第二类曲线积分)

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i .$$



其中 $\Delta x_i = (\overrightarrow{M_{i-1}M_i})_x = x_i - x_{i-1}$.

$L \perp y$轴

$Q(x,y)$对坐标y的曲线积分

$$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i .$$

$\int_L Q\,dy = 0$

$\int_L p\,dx + \int_L Q\,dy$

$= \int_L p\,dx + Q\,dy$

同样方式定义沿空间有向曲线弧的积分:

$= \int_L \{P,Q\} \cdot \{dx,dy\}$

$$\int_L P(x,y,z)dx, \quad \int_L Q(x,y,z)dy, \quad \int_L R(x,y,z)dz.$$

注：沿垂直于坐标轴的曲线的第二类曲线积分)

2、性质

(1) 线性；　　(2) 关于积分弧的可加性；

(3) 有向曲线弧反向，第二类曲线积分反号：

$$\int_{-L} P(x,y)dx = -\int_L P(x,y)dx$$

$$\int_{-L} Q(x,y)dy = -\int_L Q(x,y)dy$$

$$\int_{-L} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_L \vec{f}\cdot d\vec{s}.$$

即：对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.

3、计算

(1)基本方法(直接法或参数法)

1) 曲线 L : $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ 起点 $t=\alpha$, 终点 $t=\beta$.

$x \quad y$

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

2) 曲线 $L: y=\varphi(x)$ $\quad x$起点为a, 终点为b. 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\,\varphi'(x)\}dx.$$

3) 曲线 $L: x=\psi(y)$ $\quad y$起点为c, 终点为d. 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[\psi(y),y]\psi'(y) + Q[\psi(y),y]\}dy.$$

(2)格林公式

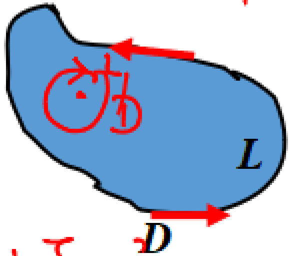
设闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，

1° $P(x,y)$、$Q(x,y)\in C^1_D$，则

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_L=\oint_{L+L_1}-\oint_{L_1}$$

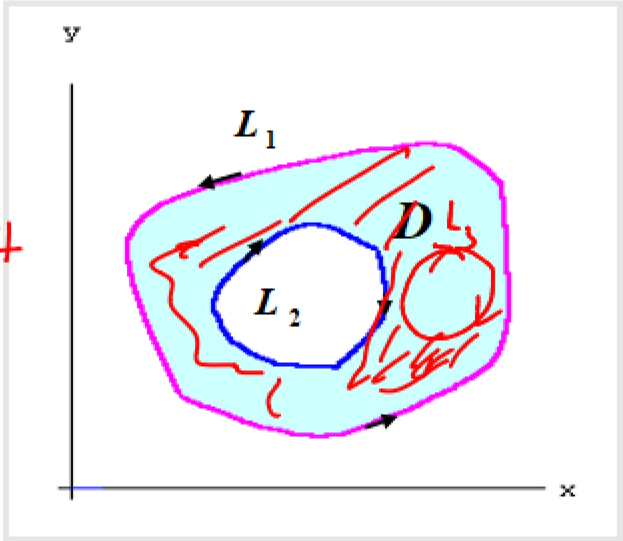
2° 其中 L 是 D 的边界正向.



曲线L的正向：当观察者沿边界行走时，区域D总在左边。

$$\int_L\neq\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}$$

L不封闭 补L_1使$L+L_1$封闭

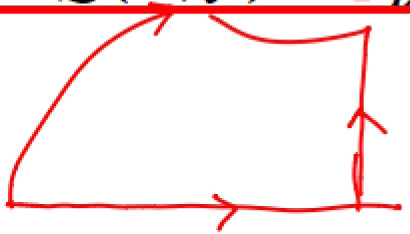


L 由 L_1 与 L_2 组成

注：直接用、补曲线用、挖去奇点用格林公式

(3)利用积分与路径无关

定理 设 D 为单连通区域，$P(x,y)$、$Q(x,y)\in C_D^1$，



那么，下面四条等价：

1) 在 D 上，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$；

2) 对 $\forall$ 闭路 $L\subset D$，有 $\oint_L Pdx+Qdy=0$；

3) 在 D 上，$\int_{\overset{\frown}{AB}}Pdx+Qdy$ 与路径无关；

4) 在 D 上，$Pdx+Qdy$ 是某个函数的全微分，

即有原函数（$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$ 是一个原函数）.

$\int_L du=u(终点)-u(起点)$

(4) 利用两类曲线积分的联系

$$\left(\int_L \underline{Pdx+Qdy}=\int_L \underline{(P\cos\alpha+Q\cos\beta)}ds\right)$$

L正方向上的单位切向量 $\{\cos\alpha,\cos\beta\}$

设有向平面曲线弧为 L: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,

$$\underline{\cos\alpha}=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\underline{\cos\beta}=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

$$\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds=\int_L \left(P\frac{\varphi'(t)}{\cancel{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}}+Q\frac{\psi'(t)}{\cancel{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}}\right)\cancel{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}dt$$

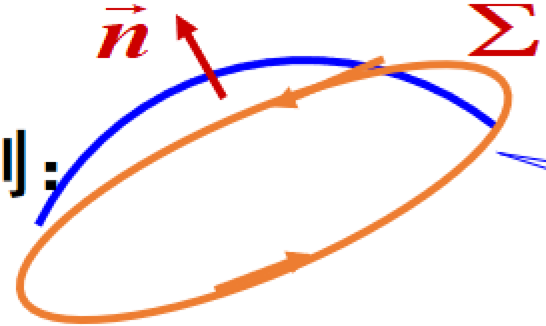
$$=\int_L (P\varphi'(t)+Q\psi'(t))dt=\underline{\int_L Pdx+Qdy}$$

(5) 利用斯托克斯(stokes)公式(空间曲线)

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧**符合右手规则**，P、Q、$R \in C^1_{\Sigma\cup\Gamma}$，则有

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

右手规则:



Γ是有向曲面 Σ 的边界曲线的正向

Stokes公式可写成

第二类曲线积分

第二类曲面

第一类曲面

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$= \oint_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

注：空间曲线还可用直接法计算

第二类曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+ Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

t 起点α,终点β

常考题型与典型例题

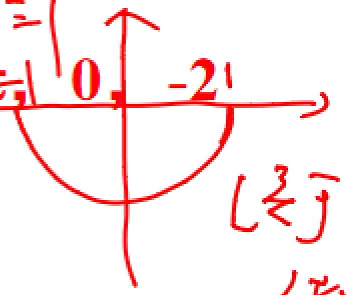
一、第一类曲线积分的计算

$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

例 1(1989) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds =$ _, $\int_L xds$ _, $\int_L yds$.

$x^2+y^2=1$

π, 0, -2



L关于y轴对称，x为奇。

1° 代 $\int_L ds=\pi$ ✓

2° $=0$ 对称

3° $\int_L y ds = \int_{-1}^{1} -\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx$

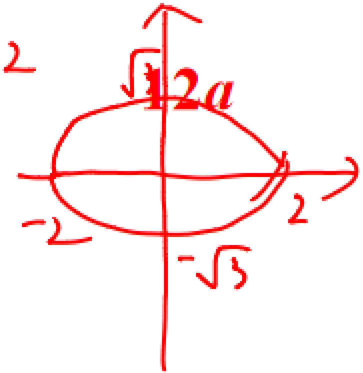
$= -\int_{-1}^{1} dx = -2$

例 2(1998) 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则

$2x^3y^{100}$　　$\sin^{100}x$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2=12$

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)ds = \underline{\qquad\qquad}.$$



12a

原式 $=\oint_L(2xy+12)ds=\boxed{\oint_L 2xy\,ds}+12\oint_L ds$

$12a$

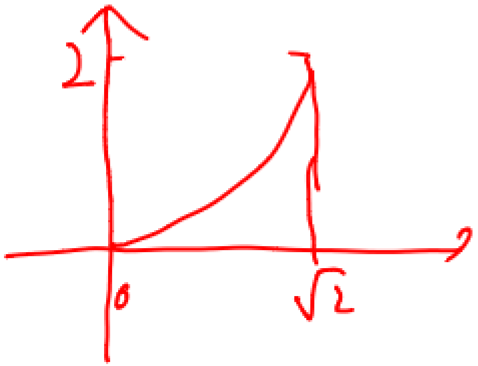
例 3(2009) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \le x \le \sqrt{2})$，则 $\int_L x ds = \underline{\frac{13}{6}}$.

分析

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

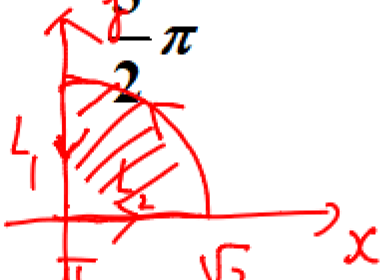
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} (1+4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}}$$



二、第二类曲线积分的计算

例 4(2004) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L \underset{}{\overset{Q}{x}}dy\,\overset{P}{-2y}dx$ 的值为 $\underline{\qquad\qquad}$. $\frac{3}{2}\pi$



法一. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t+2\sqrt{2}\sin t\cdot\sqrt{2}\sin t\right)dt$ $\quad\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$ $\quad t: 0\to\frac{\pi}{2}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin^2 t+4\cos^2 t\right)dt$

$=6\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$

$\quad\|$

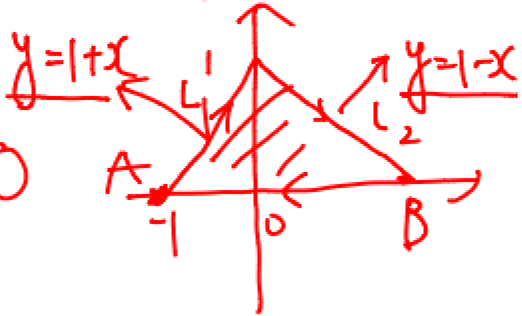
法二: 补 L_1, L_2

$\int_L=\oint_{L+L_1+L_2}-\int_{L_1}-\int_{L_2}=\iint_D 3\,dxdy-0-0$

例 5(2010) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|, x\in[-1,1]$，起点是 $(-1,0)$，终点是 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L \overset{P}{xy}\,dx+\overset{Q}{x^2}\,dy=$ __0__.

解一. $\int_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}$ ✓

$=\int_{-1}^{0}(x(1+x)+x^2)\,dx+\int_0^1(x(1-x)+x^2)\,dx=0$



解二; 补 $\overrightarrow{BA}$

$I=\oint_{L+AB}-\int_{\overrightarrow{BA}}=\iint_D x\,dxdy-0$

$=0-0=0$

例 6(1999) 求 $I=\int_L (e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

$\underbrace{e^x\sin y-b(x+y)}_{P}$，$\underbrace{e^x\cos y-ax}_{Q}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-a$，$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-b$

$\frac{\pi}{2}(b-a)a^2+2a^2b$

$$I=\oint_{L+\overrightarrow{OA}}-\int_{\overrightarrow{OA}}$$

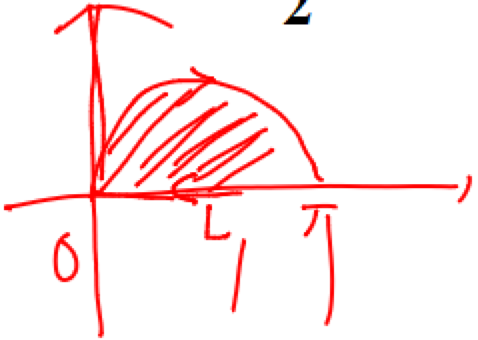
$$=\iint_D (b-a)\,dxdy-\int_{\overrightarrow{OA}} -bx\,dx$$

$$=(b-a)\cdot\frac{\pi a^2}{2}+\int_0^{2a} bx\,dx$$

例 7(2008) 计算曲线积分 $\int_L \underbrace{\sin 2x}_{P}dx + \underbrace{2(x^2-1)y}_{Q}dy$，

其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点(0,0)到点 $(\pi,0)$ 的一段. $-\dfrac{\pi^2}{2}$

分析 $I = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} = -\iint_D 4xy\,dxdy - \int_{\pi}^{0} \sin 2x\,dx$.



例 8(2014) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L \overset{P}{z}dx+\overset{R}{y}dz=$ ___π___.

解一 L: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=-\sin t \end{cases}$

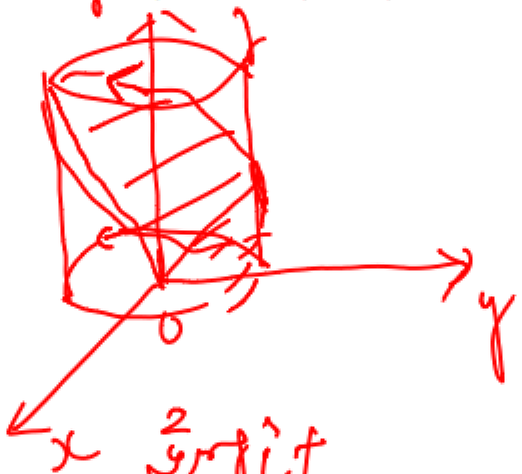
$I=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t+\sin t\cos t)\,dt$

解二 (4) 斯托克斯公式

解三 降维

$\oint_L z\,dx+y\,dz = \oint_{L_1} \overset{P}{-y}\,dx \; \overset{Q}{y}\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy = \pi$

L_1: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$



z 正向

第三节 曲面积分

考试要求

1、了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系.

2、掌握计算两类曲面积分的方法.

3、掌握用高斯公式计算曲面积分的方法，并会用斯托克斯公式计算曲线积分.

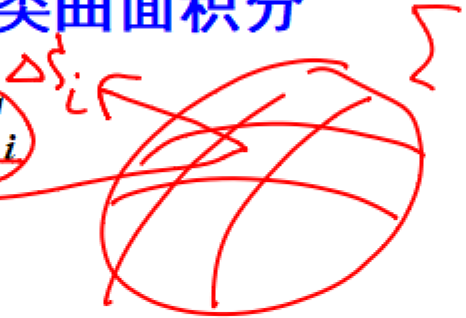
考试内容概要

一、对面积的曲面积分(第一类曲面积分)

1. 定义

$f(x,y,z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分或第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$



2. 性质

1) 线性； 2) 关于积分曲面的可加性；

3) $\iint_{\Sigma} dS = |\Sigma|$； 4) 比较定理；

5) 估值不等式； 6) 中值定理 .

3、计算

基本方法——找到 Σ（以直角坐标为参数）的双参数方程，将曲面积分化为对参数的二重积分。

1) 设光滑曲面

$\Sigma: z = z(x,y) \quad (x,y)\in D_{xy}$，其中 $z(x,y)\in C^1_{D_{xy}}$

$\cos\gamma$

则 $d\sigma_{xy} = \cos(\vec{n}_{上}, \hat{\vec{k}})dS = \cos\gamma\, dS$

而 $\vec{n}_{上} = \{-z'_x, -z'_y, 1\} \Rightarrow \vec{n}^0_{上} = \dfrac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}\{-z'_x, -z'_y, 1\}$

$$\therefore \boxed{dS} = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy,$$

则 $$\iint\limits_{\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}} f(x,y,z)\,dS$$

代入

$$= \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}}\,dxdy\;;$$

ds

同理可得 $$\iint\limits_{\Sigma: y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}} f(x,y,z)\,dS$$

代入

$$= \iint\limits_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_z'^{\,2}+y_x'^{\,2}}\,dzdx\;;$$

代入

$$\iint\limits_{\Sigma: x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}} f(x,y,z)\,dS = \cdots .$$

注意：一投、二代、三换.

4、第一类曲面积分的对称性（同三重积分类似）

1)若Σ关于xOy面对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases} 0, & \text{若} f(x,y,-z)=-f(x,y,z), \\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S & \text{若} f(x,y,-z)=f(x,y,z), \end{cases}$$

类似地，可得到曲面Σ关于yOz面、zOx面对称的情形.

2)若x，y互换后，曲面Σ不变，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)dS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+f(y,x,z)]dS;$$

若$x\to y$，$y\to z$，$z\to x$，曲面Σ不变，则

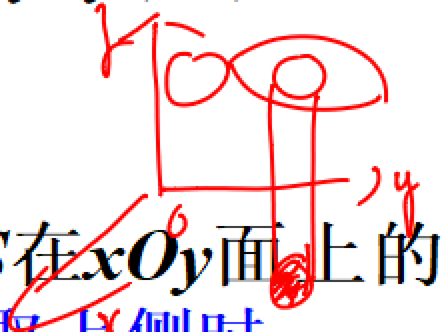
$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(z,x,y)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y,z,x)dS=\cdots;$$

二、对坐标的曲面积分(第二类曲面积分)

1、概念

双侧曲面：比如，函数曲面 $z=z(x,y)$、$y=y(z,x)$、$x=x(y,z)$

单侧曲面：莫比乌斯（Möbius）带。



双侧曲面的一侧称为有向曲面。

有向曲面的投影：有向曲面Σ上小块ΔS在xOy面上的

$$(\text{有向})\text{投影}(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\Delta S\text{取上侧时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\Delta S\text{取下侧时.}\\ 0 & \text{当}\Delta S\perp xOy\text{时}\end{cases}$$

其中$(\Delta\sigma)_{xy}$表示投影区域的面积．

$R(x,y,z)$在有向（光滑）曲面Σ上对坐标x、y的曲面积分(第二类曲面积分)

$P - y, z \quad Q.\ z, x \quad R\ x, y$

$\iint R\,dxdy = 0 \Leftarrow \Sigma \perp xoy$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

类似可定义

$\iint_{\Sigma} P\,dydz + \iint_{\Sigma} Q\,dzdx + \iint_{\Sigma} R\,dxdy = \iint_{\Sigma} P\,dydz + Q + R$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz, \quad \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx.$$

第二类曲面积分存在的充分条件：连续.

注意：垂直于坐标面的曲面的第二类曲面积分。

2、性质:

1).线性性； 2).关于积分曲面的可加性；

3).与积分曲面定向的相关性

Σ^-

$$\iint\limits_{-\Sigma} P(x,y,z)dydz = -\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = -\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = -\iint\limits_{\Sigma} \vec{f}(x,y,z)\cdot d\vec{S}.$$

3、计算

1)直接法(投影法)

有向投影元素

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy$$

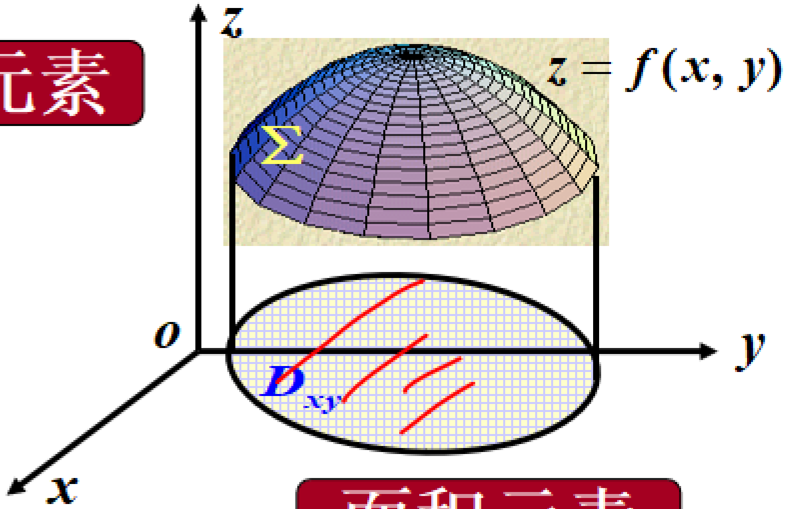
若$\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)](\pm dxdy)$$

面积元素

$$= \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,dxdy.$$

注：上侧+下侧-



即：对x、y的曲面积分，将Σ表为$z=z(x,y)$，代入曲面积分中，化为对x、y在D_{xy}上的二重积分。

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz \xlongequal[\qquad\qquad]{\Sigma: x=x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}} \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

注：前侧+后侧-

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx \xlongequal[\qquad\qquad]{\Sigma: y=y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}} \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

注：右侧+左侧-

注意:对坐标的曲面积分与所取的侧有关。

2)高 斯 公 式

设空间闭区域Ω由（分片）光滑的闭曲面 Σ 围成，1° $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)\in C^1_{\Omega}$ ，则

$$\oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

2°

其中 Σ 是 Ω 的边界曲面的正向

Σ不封闭 补Σ₁ 使Σ+Σ₁封闭

注：直接用、补曲面用、挖去奇点用高 斯 公 式

$$\iint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

3)利用两类曲面积分之间的关系

$$\oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \oiint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

其中 $\cos\alpha$ 、$\cos\beta$、 $\cos\gamma$ 是 Σ 上正向法向量的方向余弦。

常考题型与典型例题

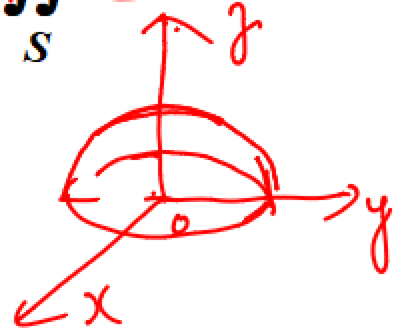
一、第一类曲面积分的计算

例 1(2000) 设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分，则有 答案：C

(A) $\iint\limits_S x\,dS = 4\iint\limits_{S_1} x\,dS$.　　(B) $\iint\limits_S y\,dS = 4\iint\limits_{S_1} x\,dS$.

(C) $\iint\limits_S z\,dS = 4\iint\limits_{S_1} x\,dS$.　　(D) $\iint\limits_S xyz\,dS = 4\iint\limits_{S_1} xyz\,dS$.

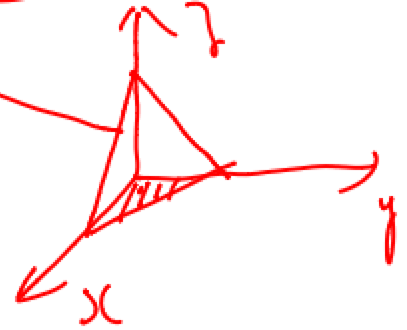
$4\iint\limits_{S_1} z\,dS$



例 2(2012) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$，

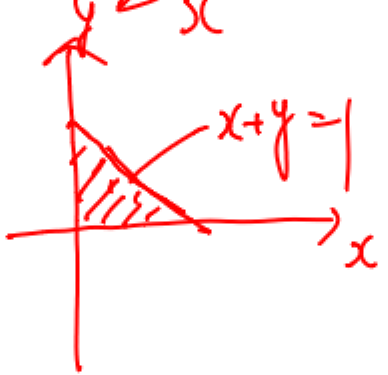
则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS=$ ____. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

$\Sigma: z=1-x-y$

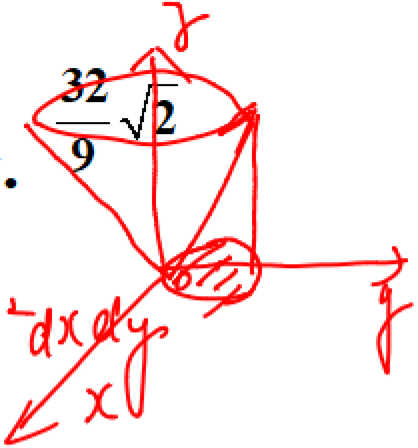


原 $=\iint\limits_{D} y^2\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

$=\sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2 dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2 dx$

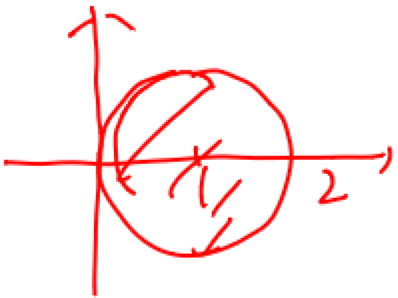


例 3(1995) 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\,dS$，其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分. $\frac{32}{9}\sqrt{2}$



分析: $I=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy$

$=\sqrt{2}\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$



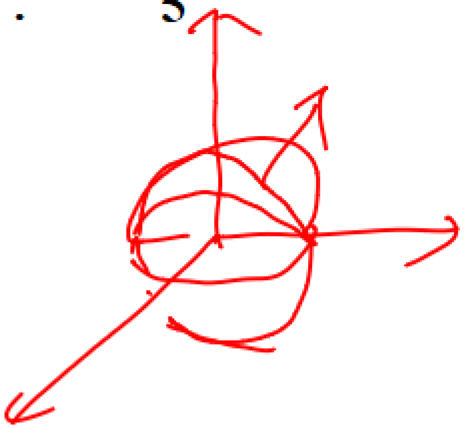
二、第二类曲面积分的计算

例 4(1988) 设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分 $I=\oiint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

$\frac{12}{5}\pi$

高斯 $\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dV$

球坐标 $=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$



例 5(2005) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} \underset{P}{x}dydz+\underset{Q}{y}dzdx+\underset{R}{z}dxdy=$.

分析 高斯公式

【详解】 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega} 3dxdydz$

$I=\iiint\limits_{\Omega} 3dV = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{R} r^2\sin\varphi\, dr$

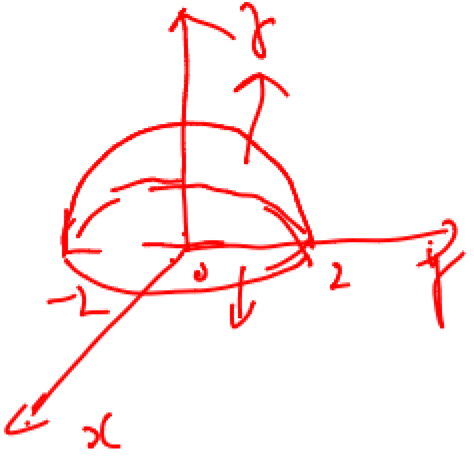
$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}\rho^2 d\rho=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^3.$$

例 6(2008) 设曲面Σ是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则

$$\iint_{\Sigma} xy\,dydz + x\,dzdx + x^2\,dxdy = \underline{\quad 4\pi \quad}$$

$P \qquad Q \qquad R$

分析：补面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=0 \end{cases}$ 取下侧



$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} y\,dV - \iint_{\Sigma_1} x^2\,dxdy$$

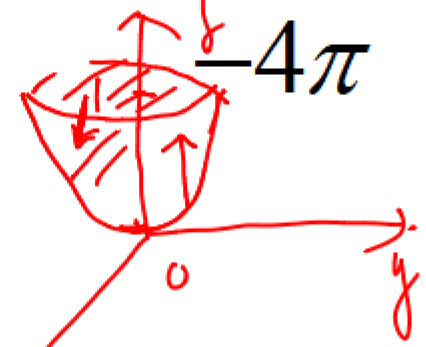
$$= 0 + \iint_{x^2+y^2\le 4} x^2\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)\,dxdy$$

例 7(2014) 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ $(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$.

$P \quad Q \quad R$

-4π

分析. 补曲面用高斯公式 $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=1 \end{cases}$ 下侧



$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$$

$$-7\iiint\limits_{\Omega}dV \quad 代入$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}0\,dxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left[3(x^2+y^2)-6x-6y+7\right]dxdydz$$

第四节 多元积分的应用

考试要求

会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量（平面图形的~~面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心~~、形心、转动惯量、引力、功及流量等）.

考试内容概要

1、多元积分的应用

	平面板	空间体	曲线	曲面
几何度量	面积：$S=\iint\limits_{D} d\sigma$	体积：$V=\iiint\limits_{\Omega} dV$	弧长：$L=\int\limits_{C} ds$	面积：$S=\iint\limits_{\Sigma} dS$
质量	$m=\iint\limits_{D}\rho(x,y)d\sigma$	$m=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dV$	$m=\int\limits_{C}\rho(x,y,z)ds$	$m=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$
形心 质心	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_{D} x\cancel{\rho(x,y)}d\sigma}{\iint\limits_{D}\cancel{\rho(x,y)}d\sigma}$	$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dV}$	$\bar{x}=\dfrac{\int\limits_{C} x\rho(x,y,z)ds}{\int\limits_{C}\rho(x,y,z)ds}$	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} x\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS}$
转动惯量	$I_x=\iint\limits_{D} y^2\rho(x,y)d\sigma$	$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$ I_0	$I_x=\int\limits_{C}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$	$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

2、变力做功

设质点在力 $F(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 作用下，沿平面曲线 C 由 A 点移动到 B 点，则质点在移动过程中 F 所做的功

向量场

$$W=\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

3、通量

$$\Phi=\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

4、环流量

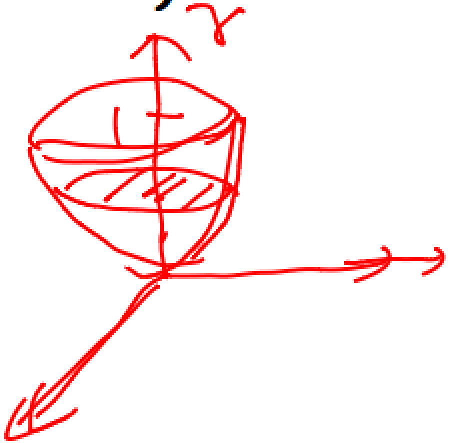
$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

常考题型与典型例题

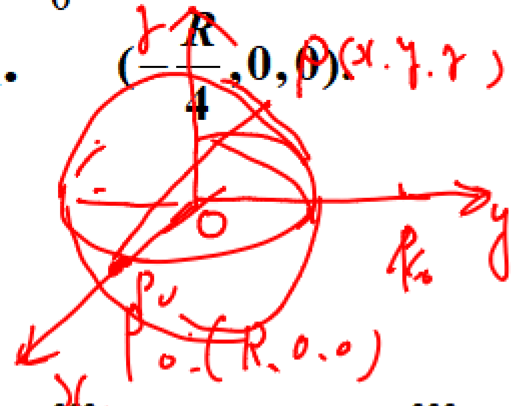
例 1(2010) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2\le z\le 1\right\}$，则 Ω 的形心坐标 $\bar{z}=$ $\underline{\quad \frac{2}{3} \quad}$

$\bar{x},\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}=$$



例 2(2000) 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到P_0的距离的平方成正比（比例系数 $k>0$）,求球体的重心位置. $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$



$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega xk[(x-R)^2+y^2+z^2]dV}{\iiint\limits_\Omega k[(x-R)^2+y^2+z^2]dV}$$

ρ

$\bar{y}=0$

$\bar{z}=0$

P(x.y.z)

$$\iiint\limits_\Omega xk[(x-R)^2+y^2+z^2]dV=-2Rk\iiint\limits_\Omega x^2dV$$

$$=-\frac{2}{3}Rk\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV$$

$$=-\frac{2}{3}Rk\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^2r^2\sin\varphi dr=-\frac{8}{15}k\pi R^4.$$

$$\iiint\limits_\Omega k[(x-R)^2+y^2+z^2]dV=k\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV+k\iiint\limits_\Omega R^2dV$$

$$=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^2r^2\sin\varphi dr+\frac{4}{3}k\pi R^5=\frac{32}{15}k\pi R^5.$$

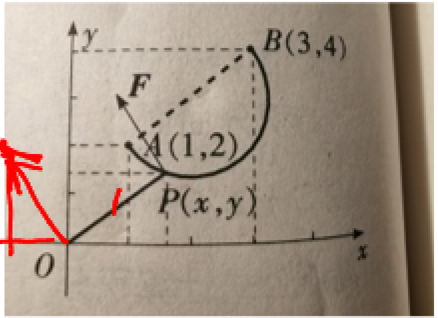
例 3(1990) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1，2)$运动到点 $B(3，4)$的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用（见图），$\vec{F}$ 的大小等于点 P 到原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$.求变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所做的功.

$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

$$L:\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\cos\theta \\ y = 3 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$$

$$W = \int_L -ydx + xdy$$

(-y,x)



{x,y}

$$W = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta + \sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta]d\theta = 2(\pi - 1).$$

第五节 场论初步

考试要求

1、理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法.

2、了解散度与旋度的概念，并会计算.

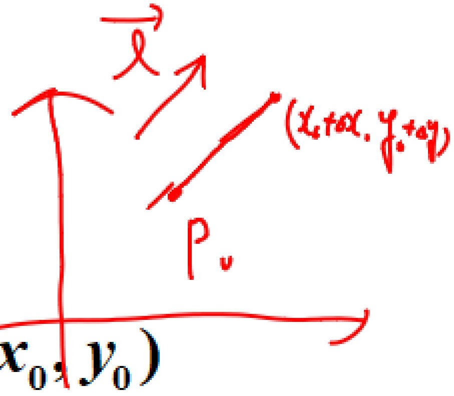
考试内容概要

一、方向导数

1、定义

$$\vec{l}^{\,0}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$



$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}.$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

2、定理

$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则函数在该点沿任何方向的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta},$$

二、梯度

$u=f(x,y,z)$在点 $P(x,y,z)$的梯度为：

$$\mathrm{grad} f(x,y,z)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

注：函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向是函数在该点方向导数最大的方向，它的模是最大方向导数的值.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=f'_x\cos\alpha+f'_y\cos\beta=\overbrace{\{f'_x,f'_y\}}^{\mathrm{grad} f}\cdot\overbrace{\{\cos\alpha,\cos\beta\}}^{\vec{l}}$$

$$=|\{f'_x,f'_y\}|\,|\{\cos\alpha,\cos\beta\}|\cos\theta \qquad \theta=0$$

三、散度

向量场 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

P、Q、R 函具有一阶连续偏导数，则向量场在点(x,y,z)处的散度为

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

四、旋度

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

常考题型与典型例题

例 1(1996) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$方向的方向导数为 $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$.

例 2、 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿 $\vec{l}=\{1,-1,0\}$ 方向的方向导数最大.

$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$

例 3(2012) $grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$ $\underline{\quad\{1,1,1\}\quad}$.

例 4(1989) 向量场 $\vec{u}(x,y,z)=xy^2\vec{i}+ye^z\vec{j}+x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $div\vec{u}=$ <u>2</u>.

例 5(2018) 设 $\vec{F}(x,y,z)=xy\vec{i}-yz\vec{j}+zx\vec{k}$，则 $\mathrm{rot}\,\mathrm{F}(1,1,0)=$ $\underline{\ \vec{i}-\vec{k}.\ \ \ }$.