2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

第十二章 多元积分学及其应用

2009-2021 年三重、线、面积分分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
三重	4	4			10		4				10		
一线	4									4			
二线		4	4	10	4	4	10	10	4		4	10	6
一面		10		4					10				
二面	10					10		10		10	4	10	5
合计	18	18	4	14	14	14	14	20	14	14	18	20	11

两个问题

1°. 转化成 定积分

2°. 被积函数 定积分

定义. 1°划分

2°取点

3°求和

4°取极限

第一节 三重积分

考试要求

1、理解三重积分的概念，了解三重积分的性质

2、会计算三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）.

先二后一

先一后二

考试内容概要

一、定义.

设函数$f(x,y,z)$在有界区域Ω上有界，若对 Ω 作任意分割 $\Delta v_k(k=1,2,\cdots,n)$，任意取点$(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$，下列“乘积和式” 的极限

$= \iiint f \, dx\,dy\,dz$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \xlongequal{\text{记作}} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的三重积分.

$\mathrm{d}v$称为体积元素，在直角坐标系下常写作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

二、性质：

三重积分的性质与二重积分相似.

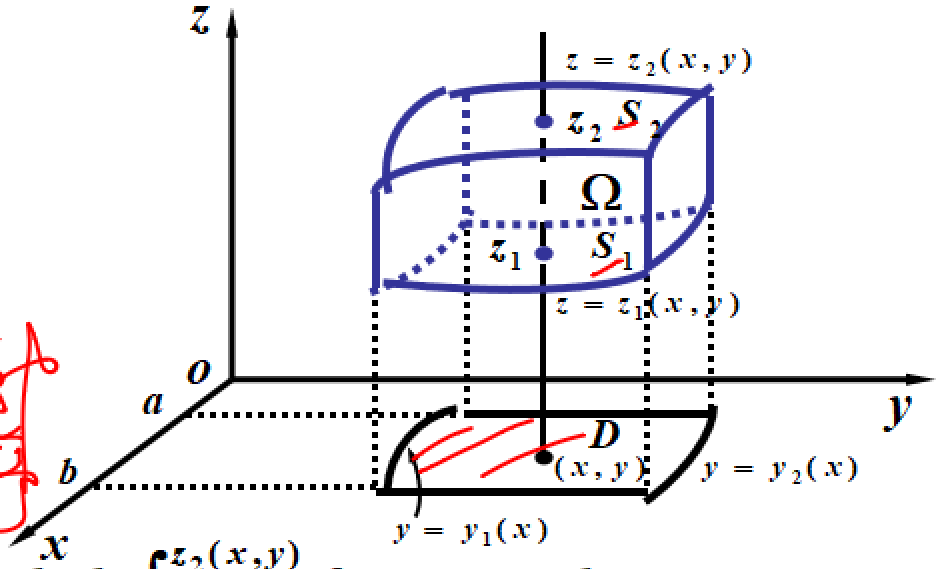
例如 **中值定理.**

设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上连续， V 为Ω 的体积，则存在$(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

三、计算

1、利用直角坐标



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

若 $\Omega: z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, $(x,y) \in D$

3!=6种 积分次序

$$\iint_D \Big(\boxed{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}\Big)dxdy = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

是一函二

沿积分

又若 $D: y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$

先z再y后x

$$\int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \Big(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big)dy\Big)dx$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

若 $\Omega:(x,y,z)\in D_z,\ z\in[c_1,c_2]$

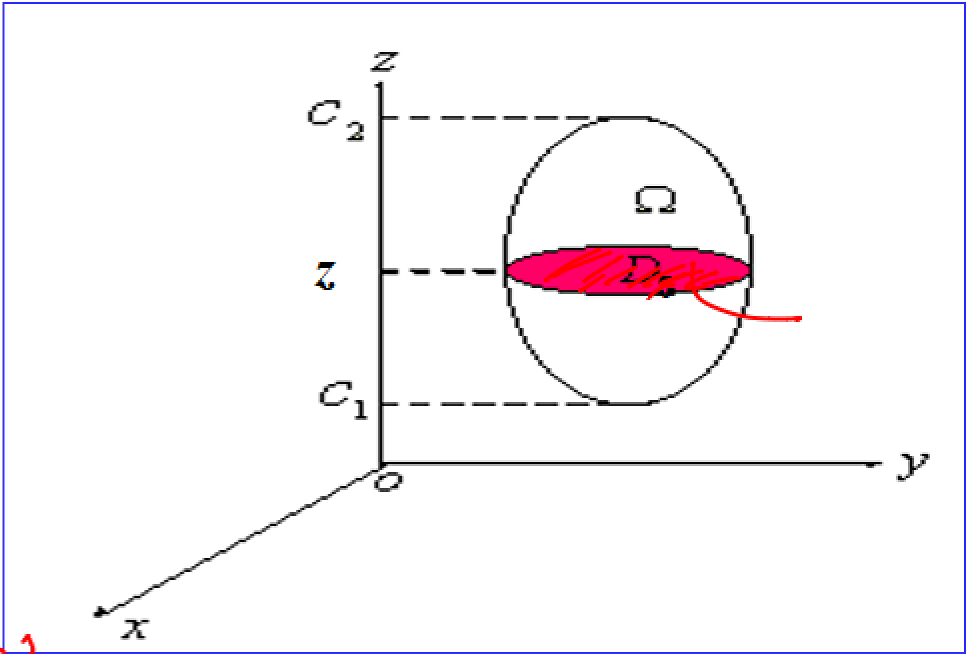
先二后一

$$= \int_{c_1}^{c_2}\Big(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,d\underline{x}\,d\underline{y}\Big)dz$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} \boxed{f(x,y,z)}\,d\underline{xdy}$$

仅与z有关

先二后一



2、利用柱面坐标计算

点 M 的柱（面）坐标 (ρ,θ,z).

三族柱坐标面：　　(x,y,z)

ρ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆柱面；

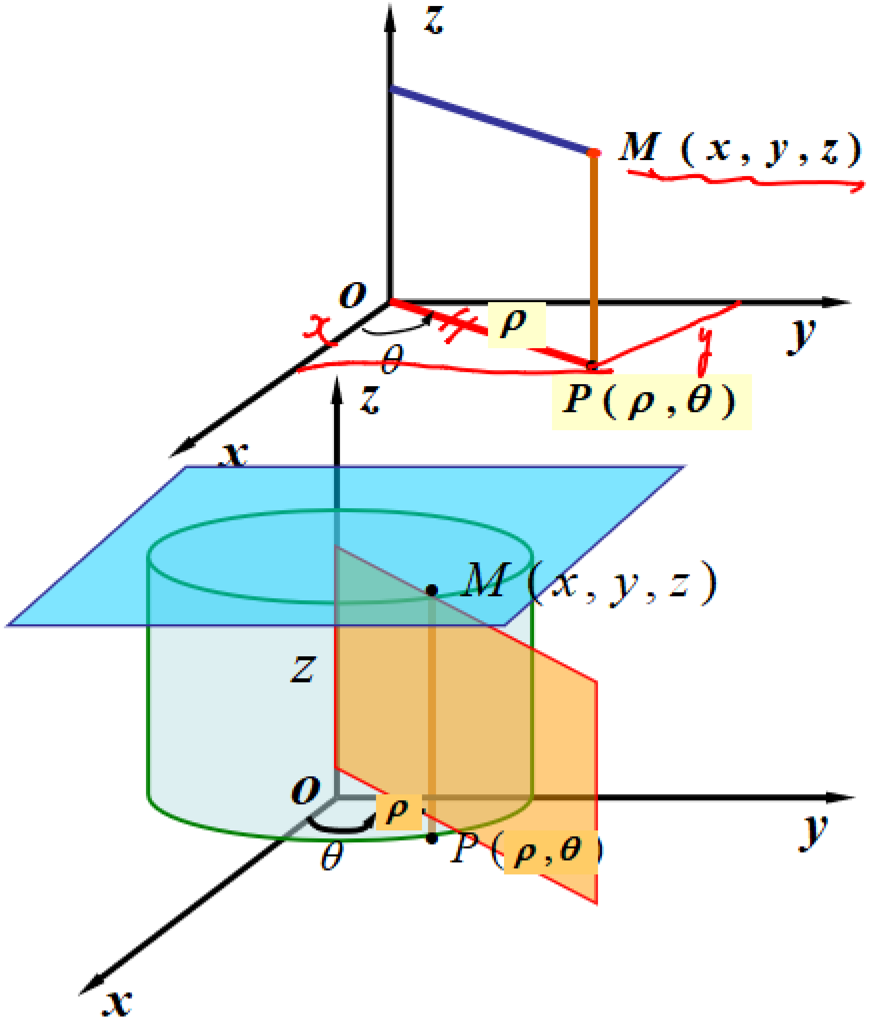
θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面；

z 为常数 $\Longrightarrow$ 平　面.

柱坐标与直角坐标的关系

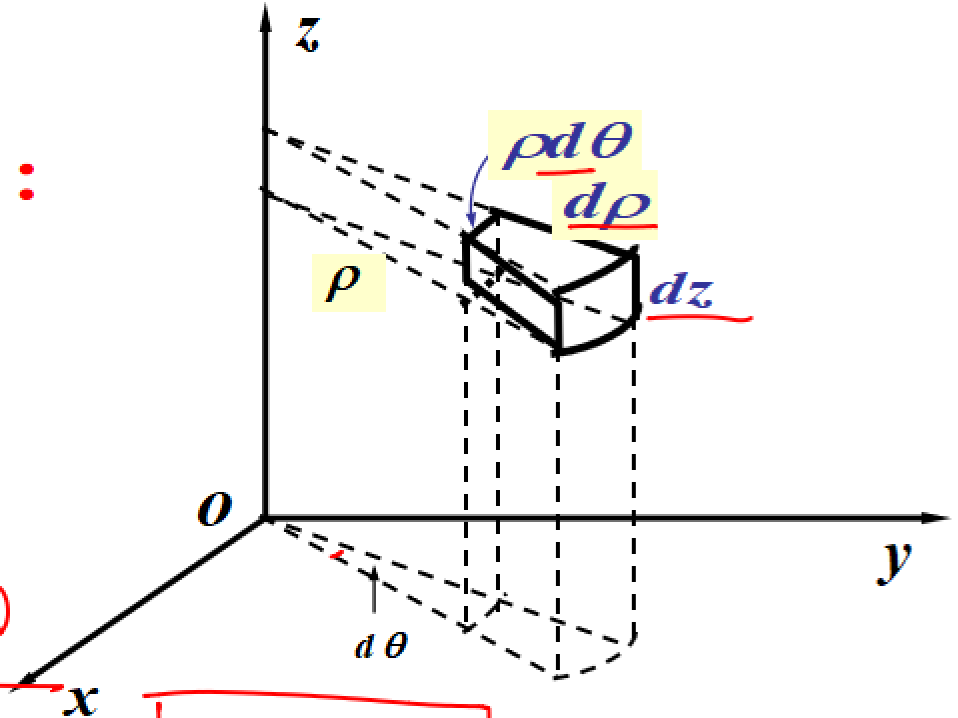
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$$

$f(x^2+y^2)$



柱坐标系中的体积元素：

$$dv = \underline{\rho d\rho d\theta dz},$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

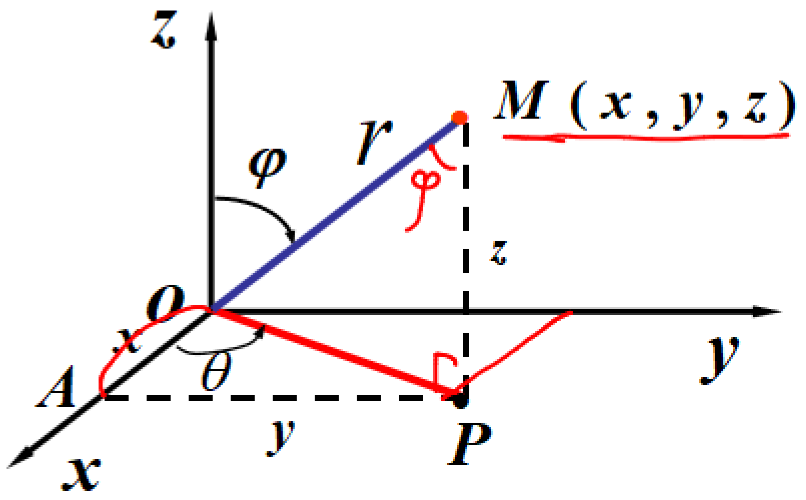
先z，再ρ，后θ

$$= \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \cdot \boxed{\rho d\rho d\theta dz}.$$

3、利用球面坐标计算

(ρ,φ,θ)

点 M 的球（面）坐标 (r,φ,θ).



三族球坐标面：

r 为常数 $\Longrightarrow$ 球　　面；

φ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆锥面；

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面.

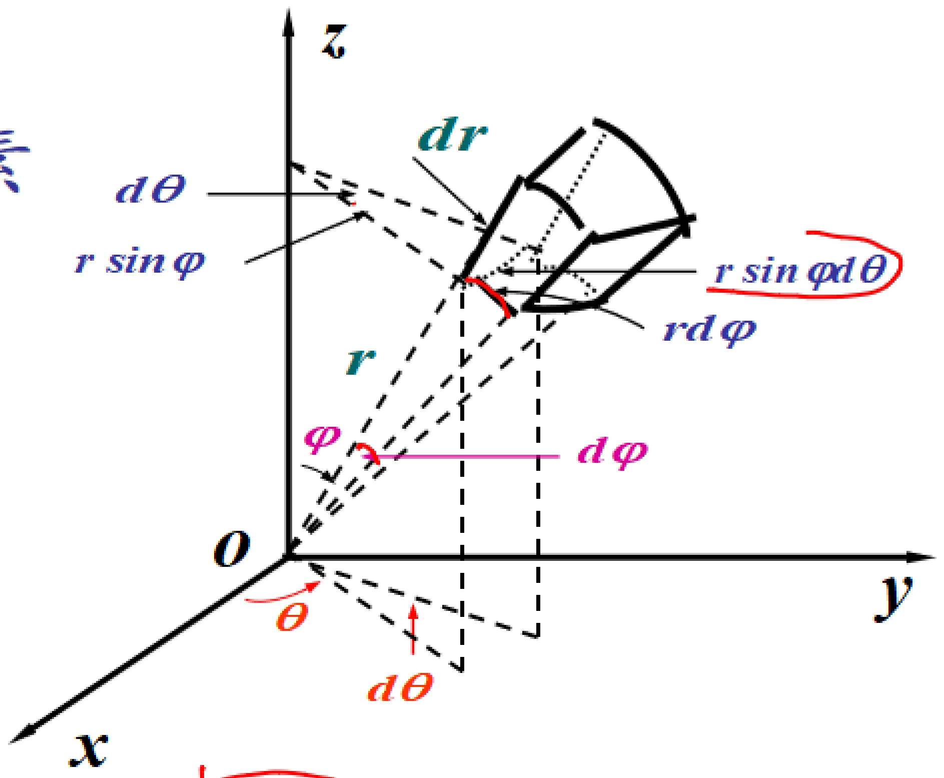
球坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

球坐标系中的体积元素

$$dV = \boxed{r^2 \sin\varphi}\, dr\, d\varphi\, d\theta,$$

$f(x^2+y^2+z^2) = f(r^2)$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz$$

先r 再φ 后θ

$$= \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, \boxed{r^2 \sin\varphi}\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

四、三重积分的对称性

f 关于 z 是奇函数

1、Ω关于 xOy 面对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x,y,-z)=-f(x,y,z) \text{ 时},\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dV, & \text{当 } f(x,y,-z)=f(x,y,z) \text{ 时}.\end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 在 xOy 面上方的部分.

类似地，可得到 Ω 关于 yOz 平面、zOx 平面对称的情形.

2、轮换对称性

（1）若 x, y 互换后区域 Ω 不变，则

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}[f(x,y,z)+f(y,x,z)]dV$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dV.$$

$$= \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(\qquad)dV$$

（2）若 $x\to y, y\to z, z\to x$ 区域 Ω 不变，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(y,z,x)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(z,x,y)dV.$$

常考题型与典型例题

1 三种坐标系-直角坐标下 $dV=dxdydz$，柱坐标下 $dV=rdrd\theta dz$，球坐标下 $dV=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$.

2 基本方法——化为累次积分(化为三次积分、二次积分(一次定积分和一次二重积分-先二后一).

积分顺序与定限顺序相反———先积分者后定限.

3 关键——选择适宜坐标系和累次积分顺序.

1)积分域的形状(分块少，表达简便)

边界主要为直角坐标面(柱坐标面、球坐标面)———直角坐标(柱坐标、球坐标);

2)被积函数的形式

含 x^2+y^2—柱坐标，含 $x^2+y^2+z^2$—球坐标。

4 利用对称性、轮换对等性等等化简计算。

例 1(1988) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$;

及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$，则

第一卦限

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\,dV$.　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\,dV$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\,dV$.　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,dV = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\,dV$.

关于x.y均为偶函数

答案：C

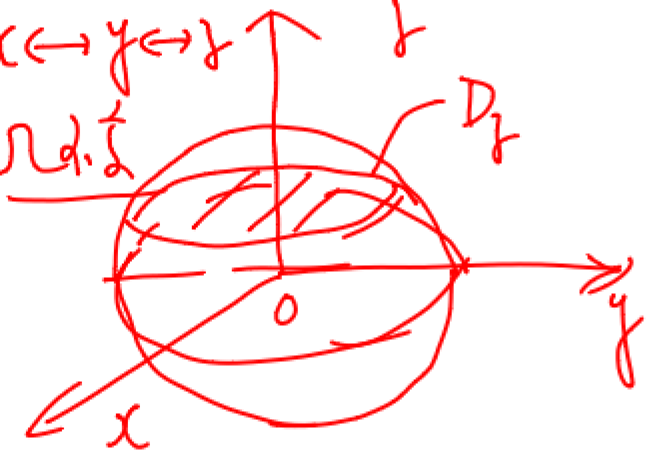
分析 Ω_1 关于yoz，和xoz对称

例 2(2009) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则

$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz=$ ________. $\dfrac{4}{15}\pi$

$x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$

$\iint dxdz$



1° $z=z_0$ — $I=\int_{-1}^{1} z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy$

$=\int_{-1}^{1} z^2\cdot\pi(z^2-1)\,dz$

2° $\iiint\limits_{\Omega} z^2dV=\iiint\limits_{\Omega} x^2dV=\iiint\limits_{\Omega} y^2dV$

$=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{1}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$

例 3(2015) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ $\underline{\quad \frac{1}{4} \quad}$.

分析：轮换对称

$\iiint x\,dV=\iiint y\,dV=\iiint z\,dz$

$x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$

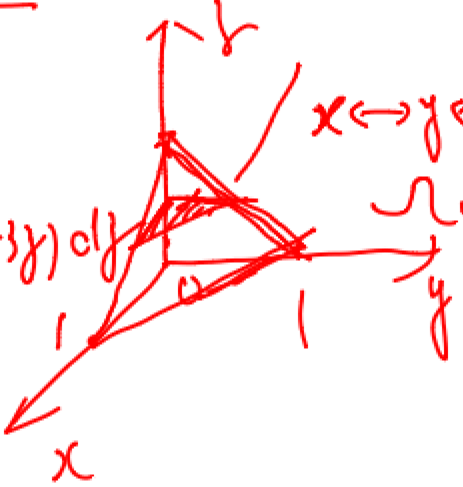
Ω

$I=6\iiint z\,dV$

$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+2y+3z)\,dz$

$=6\int_0^1 z\,dz \boxed{\iint\limits_{D_z} dxdy}$

$=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz=\frac{1}{4}$



例 4(1989) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域. $\frac{\pi}{8}$

分析 $\iiint x\,dV=0$　$\iiint z\,dV$

法一 球面坐标 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0 r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\,dr$

法二 先一后二 =

法三 先二后一 =

$$\iint\limits_{D}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\,dz$$

法四 柱面坐标

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}z\cdot r\,dz$$