2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班习题课

2021年2月

第五部分 多元函数的微分学

85、设$u=u(\sqrt{x^2+y^2})(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$有二阶连续的偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2,\text{则}u(\sqrt{x^2+y^2})=$$

$$C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2})+x^2+y^2-2$$

86、设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{e^{xy}+xy\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $f'_x(1,0)=$ **2**

87、设$z=e^{x}+y^{2}+f(x+y)$，且当$y=0$时，$z=x^{3}$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$

$$e^{x}+3(x+y)^{2}-e^{x+y}$$

88、 设 $z=(x-2y)^{y-2x}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \quad -2$

89、设 $f(x,y)=\ln|x+y|-\sin(xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在点 $(1,\pi)$ 处的值为

$$\frac{\pi(2+\pi)}{(1+\pi)^2}$$

90、设 $f(u,v)$ 是二元可微函数, $z=f(x^y,y^{2x})$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$

$$yx^{y-1}f_1'+2\ln y\cdot y^{2x}f_2'$$

91、设$z=e^{xy}+f(x+y,xy)$，$f(u,v)$有二阶连续偏导数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

$$e^{xy}+xye^{xy}+f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2$$

92、已知函数$z=f(x,y)$在点$(1,2)$处可微，且$f(1,2)=1, f_x'(1,2)=2, f_y'(1,2)=3$,设函数$\varphi(x)=f(x,2f(x,2x))$,则$\varphi'(1)=$ 50

93、设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $4\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又

$g(x,y)=f(x^2+y^2,xy)$, 则 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=$ x^2-y^2

94、设$z=\int_0^1 |xy-t| f(t)dt, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$,其中$f(x)$为连续函数，则

$z''_{xx}+z''_{yy}=$ $2(x^2+y^2)f(xy)$

95、设$f(x),g(x)$可微，$u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$,且满足$u(x,0)=\sin 2x,u'_y(x,0)=0$,则$f(x)=$ $\frac{1}{2}\sin x+C$

96、设$z=f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，$f(x,0)=x$，$f(0,y)=y^2$，则$f(x,y)=$

$$\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$$

97、设连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则$dz\big|_{(0,1)}=$

$2dx-dy$

98、设$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-a-bx-cy}{\ln(1+x^2+y^2)}=1$，其中$a,b,c$为常数，则$df(x,y)\big|_{(0,0)}=$ $b\,dx+c\,dy$

99、设$(ax^2y^2-2xy^2)dx+(2x^3y+bx^2y+1)dy$是一个函数$f(x,y)$的全微分，

则$a=$__,$b=$___,$f(x,y)=$____ $3,-2,x^3y^2-x^2y^2+y+C$

100、设$f(x,y,z)=e^x+y^2z$，其中$z=z(x,y)$是由方程$x+y+z+xyz=0$所确定的隐函数，则$f'_x(0,1,-1)=$ 1

101、若函数$z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定,则$dz\big|_{(0,0)}=$

$$-\frac{1}{3}(dx+2dy)$$

102、设函数$f(u,v)$可微，$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定,则$dz\big|_{(0,1)}=$

$$-dx+2dy$$

103、设$f(x)$为连续函数，且$x^2+y^2+z^2=\int_x^y f(x+y-t)dt$确定的二元函数$z=z(x,y)$，则$z\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$ $\frac{1}{2}[f(y)-f(x)]-(x+y)$

104、二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极小值为 $-\dfrac{1}{e}$

105、设方程式$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-10=0$确定某隐函数$z=z(x,y)>0$，则$z=z(x,y)$的极 大 值点是 $(1,1)$，相应的极值是 6

226、设二元函数$f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$，则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=$，

(A) 1.　　(B) 0.　　(C) $+\infty$.　　(D) 不存在，也不为∞. 答案：B

227、设k为常数，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2\sin ky}{x^2+y^4}=$， 答案：A

(A) 等于 0.　　(B) 等于 $\dfrac{1}{2}$.

(C) 不存在 .　　(D) 存在与否与 k 有关.

228、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} =$， 答案：A

(A) 不存在. (B) 等于 2. (C) 等于 $\dfrac{1}{2}$. (D) 等于 0.

229、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=$， 答案：C

(A) 不存在. (B) 等于 1. (C) 等于 0 . (D) 等于 2.

230、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处

答案：C

(A)连续、偏导数存在.　　(B) 连续、偏导数不存在.

(C)不连续、偏导数存在.　　(D) 不连续、偏导数不存在.

231、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处

答案：C

(A)不连续.
(B) 连续但偏导数不存在.
(C)连续且偏导数存在但不可微.
(D) 可微.

232、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处

答案：B

(A) 两个偏导数都不存在.

(B) 两个偏导数都存在但不可微.

(C) 偏导数连续.

(D) 可微但偏导数不连续.

233、$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x^2+y^2=0 \end{cases}$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处

答案：D

(A) 不连续.

(B) 连续，但偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 不存在.

(C) 连续且偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在，但不可微.

(D) 全微分存在但一阶偏导函数 f'_x 和 f'_y 不连续.

234、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处

答案：D

(A) 连续，但偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 不存在.

(B) 连续且偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在，但不可微.

(C) 可微但 f'_x 和 f'_y 不连续.

(D) 可微且 f'_x 和 f'_y 连续.

235、设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 不连续.　　(B) 连续但两个偏导数不存在.

(C) 两个偏导数存在但不可微.　　(D) 可微.

答案：B

236、 设$f(x,y)$在$(0,0)$连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-1}{x^2+y^2}=2$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处

(A) 不存在偏导数.　　(B) 存在偏导数但不可微.　**答案：D**

(C) 可微且$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\neq 0,\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}\neq 0$. (D) 可微且$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$.

237、函数$f(x,y)$在$(0,0)$点可微的充分条件是

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$且$\lim\limits_{y\to 0} f_x'(0,y)=f_y'(0,0)$.

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$和$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$都存在.

(D) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x'(x,y)=f_x'(0,0)$且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_y'(x,y)=f_y'(0,0)$.

答案：D

238、 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，那么下列命题正确的是

(A) 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

答案：B

(B) 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

(C) 若$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在.

(D) 若$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在.

239、二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续是函数$z=f(x,y)$在该点处两个偏导数$f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$都存在的　　**答案：D**

(A) 必要但非充分条件.　　(B) 充分但非必要条件.

(C) 充要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

240 设函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处两个偏导数$f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$都存在, 则

(A) $f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$.

(D) $f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微.

答案：C

241、函数$f(x,y)$的两个偏导数在点(x_0,y_0)处连续是函数$z=f(x,y)$在该点处可微的

答案：A

(A) 充分但非必要条件.

(B) 必要但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

242、 设$f(x,y)$可微，且对任意x,y都有$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则使不等式$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是 **答案：D**

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$.　　(B) $x_1>x_2,y_1>y_2$.

(C) $x_1<x_2,y_1<y_2$.　　(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$.

243、 设可微函数$f(x,y)$满足$\dfrac{\partial f}{\partial x}>1,\dfrac{\partial f}{\partial y}<-1,f(0,0)=0$,则下列正确的是

(A) $f(1,1)>1$.

(B) $f(-1,1)>-2$.

(C) $f(-1,-1)<1$.

(D) $f(1,-1)>2$.

答案：D

244、已知方程$f(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$确定了函数$z=z(x,y)$，$f(u,v)$可微，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

(A) z．　(B) $-z$．　(C) y．　(D) $-y$．　答案：A

245、已知$\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，则$a$等于

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) 0.　　(D) -1.

答案：A

246、已知$df(x,y)=(2y^2+2xy+3x^2)dx+(4xy+x^2)dy$,则$f(x,y)=$

(A) $2xy^2+x^2y$.

(B) $2xy^2+x^2y+x^3$

答案：C

(C) $2xy^2+x^2y+x^3+C$.

(D) $3xy^2+x^2y+x^3+C$.

247、设$z=f(x,y)$在$(0,0)$连续，且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2$，则

答案：C

(A) $f'_x(0,0)$不存在．

(B) $f'_x(0,0)$存在但不为零．

(C) $f(x,y)$在$(0,0)$点取极大值．

(D) $f(x,y)$在$(0,0)$点取极小值．

248、下列命题正确的是 答案：D

(A) 若(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极值点，则(x_0,y_0)必为$f(x,y)$的驻点.

(B) 若(x_0,y_0)为$f(x,y)$的驻点，则(x_0,y_0)必为$f(x,y)$的极值点.

(C) 若(x_0,y_0)为有界闭区域D上连续的函数$f(x,y)$在D内部唯一的极值点，且$f(x,y)$在该点取极大值，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)取得它在D上的最大值.

(D) 若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极小值，则$f(x,y_0)$在$x=x_0$处取极小值，$f(x_0,y)$在$y=y_0$处取极小值

249、 设$F(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$F(x_0,y_0)=0, F'_x(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)>0$.若一元函数$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的在点(x_0,y_0)附近的隐函数，则x_0是函数$y=y(x)$极小值点的一个充分条件是

(A) $F''_{xx}(x_0,y_0)>0$.

(B) $F''_{xx}(x_0,y_0)<0$.

答案：B

(C) $F''_{yy}(x_0,y_0)>0$.

(D) $F''_{yy}(x_0,y_0)<0$.

250、函数$f(x,y)=kx^2+y^3-3y$在点$(0,1)$处

答案：D

(A) 取极大值.　　(B) 取极小值.

(C) 不取得极值.　　(D) 是否取得极值与 k 的取值有关.

251、 函数$f(x,y)=1+x+y$在区域$x^2+y^2\le 1$上的最大值与最小值之积为

(A) -1.　(B) 1.　(C) $1+\sqrt{2}$.　(D) $1-\sqrt{2}$.

答案：A

252、函数$f(x,y)=e^{-xy}$在区域D=$\{(x,y)|4x^2+y^2\le 1\}$上的最大值是

(A) e^2.　(B) e.　(C) $e^{\frac{1}{3}}$.　(D) $e^{\frac{1}{2}}$.

答案：C

253、设$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$，区域$D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 4,-1\le y\le 1\}$，则下面结论正确的是

答案：B

(A) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点且是$f(x,y)$在区域D的最大值点.

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点但不是$f(x,y)$在区域D的最大值点.

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点.

(D) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点，但不是极值点.

254、 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$某邻域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)+4x^2-y^2}{x^4+x^2y^2+y^4}=1,$$则

答案：A

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点.

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点.

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点.

(D) 所给条件不足以判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点.

255、设有三个正数x, y, z满足$x+y+z=1$，其中$a>0$为常数，又$xyz \le b$，则b的最小取值为

答案：D

(A) $\dfrac{a^3}{21}$.　(B) $\dfrac{a^3}{18}$.　(C) $\dfrac{a^3}{9}$.　(D) $\dfrac{a^3}{27}$.